

## A EQUAÇÃO DO CALOR UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL E APLICAÇÕES.

Bruno Finazzi\*, Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

### Resumo

Neste trabalho são estudadas existência e unicidade de solução da equação do calor nos casos unidimensional e  $n$ -dimensional. Também são estudadas propriedades das soluções da equação do calor, como princípio de máximo, regularidade, unicidade e dependência contínua da solução nos casos unidimensional e  $n$ -dimensional. Em particular, no caso unidimensional é estudada a aplicação da equação do calor unidimensional na transmissão de calor em barras finita e infinita em várias situações, como extremos mantidos a temperatura constante e extremos termicamente isolados.

### Palavras-chave:

*Equações Diferenciais Parciais, Equação do Calor, Problemas de transmissão de calor.*

### Introdução

Este trabalho teve como objetivo estudar as soluções da equação do calor unidimensional e bidimensional assim como suas propriedades.

Ao estudar o caso unidimensional foi estudado o problema de uma barra fina aproximada a uma barra unidimensional com diversas condições de contorno e obtivemos propriedades tais como existência, unicidade, regularidade, princípio de máximo e velocidade de propagação infinita. Ao invés do caso bidimensional, foi estudado o problema  $n$ -dimensional e foram obtidos resultados análogos.

### Resultados e Discussão

Durante a realização deste trabalho foram obtidas soluções da equação do calor unidimensional e  $n$ -dimensional, assim como propriedades destas, tais como existência, unicidade de solução, regularidade, princípios de máximo e velocidade de propagação infinita.

Começando com o caso unidimensional, foi deduzida a equação do calor no caso de uma barra fina tal que a transmissão de calor ocorresse apenas no sentido do comprimento da mesma. Em seguida, foram estudados problemas de condição inicial e contorno tais como condições de Dirichlet, Neumann ou condições mistas e também condições não homogêneas. Para isso foi utilizado o método da separação de variáveis. Posteriormente, foi estudado o princípio de máximo e com este foi obtida a unicidade de solução. Por fim foi estudada a aplicação da variação de temperatura do solo, que pode ser descrita como uma função dependente da profundidade e do período do ano ou dia.

Para o caso  $n$ -dimensional foi necessário primeiramente realizar um estudo da equação do transporte  $n$ -dimensional homogênea e não homogênea.

Seguindo com a equação do calor  $n$ -dimensional, foi feita a dedução da mesma e procurou-se encontrar uma solução que dependesse da razão entre o quadrado da norma da variável espacial pela variável temporal. Com isso chegamos à forma da solução fundamental da equação do calor  $n$ -dimensional. Ao analisar o problema de valor inicial chegamos à conclusão que a solução depende da convolução (na variável espacial) da solução

fundamental com a condição inicial e da com a convolução (nas variáveis espacial e temporal) da solução fundamental com a não homogeneidade da equação.

Posteriormente, para o estudo das propriedades da equação do calor foi estudado a esfera de calor e com isso foi obtido o princípio de máximo forte. Utilizando esse princípio foi obtida a unicidade da solução. Também foi estudada a regularidade da solução. Utilizando método de energia foi obtida novamente a unicidade de solução e também a unicidade de solução retrógrada (backward uniqueness).

### Conclusões

Concluimos com esse estudo que há existência e unicidade de solução para a equação do calor unidimensional e  $n$ -dimensional. Além disso, para esta equação ocorre um efeito regularizante e são válidos princípios de máximo e velocidade de propagação infinita.

### Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro e agradeço à Professora Bianca pela oportunidade da realização deste projeto de Iniciação Científica.

<sup>1</sup> Evans, L., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

<sup>2</sup> Farlow S. J., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Editora Dover, 1993.

<sup>3</sup> Figueiredo D. J., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

<sup>4</sup> Guidorizzi H. L., *Cálculo*, Vol. 4, 5ª edição, Ed. LTC, 2004

<sup>5</sup> Han Q., *A Basic Course in Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2010.

<sup>6</sup> Iório V., *EDP Um Curso de Graduação*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.