

Um estudo sobre linguagens formais e combinatória de palavras

Elisa Dell'Arriva*, Lehlton L. C. Pedrosa

Resumo

Este trabalho investiga padrões em palavras e sequências a partir do ferramental disponibilizado pela área de combinatória, em especial a subárea chamada combinatória de palavras. É apresentada a sequência infinita de Thue-Morse, a propriedade de palavras livres de cubo, bem como a aplicação de tal sequência em partidas de xadrez.

Palavras-chave:

Combinatória de palavras, palavra de Thue-Morse, teoria de autômatos.

Introdução

Enquanto a teoria de autômatos e linguagens formais são ramos clássicos da teoria da computação, a área de combinatória de palavras é comparativamente recente dentro dos estudos da matemática.

O objetivo deste trabalho é explorar palavras e linguagens aceitas por autômatos procurando pela ocorrência de padrões e, para isso, fizemos uso do ferramental proporcionado pela combinatória, particularmente pela combinatória de palavras.

Neste pôster, exploramos a sequência infinita de Thue-Morse, com duas aplicações práticas: desempate de partida de xadrez e composição musical.

Resultados e Discussão

Consideremos a construção da palavra de Thue-Morse a partir de um autômato finito F , a seguir.

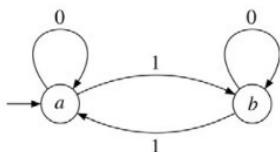


Figura 1. Autômato gerador da palavra de Thue-Morse.¹

Seja $b(x)$ uma função que retorna a expansão binária de $x=0,1,2,\dots$. Utilizamos $b(x)$ com entrada para o autômato a seguir. Quando o autômato termina no estado a , concatenamos um 'a' à palavra de Thue-Morse e, quando o autômato termina no estado b , concatenamos um 'b'. Começando em 0, temos

$$\begin{aligned} (0)_{10} &= (00)_2 \rightarrow F \rightarrow a & (4)_{10} &= (100)_2 \rightarrow F \rightarrow b \\ (1)_{10} &= (01)_2 \rightarrow F \rightarrow b & (5)_{10} &= (101)_2 \rightarrow F \rightarrow a \\ (2)_{10} &= (10)_2 \rightarrow F \rightarrow b & (6)_{10} &= (110)_2 \rightarrow F \rightarrow a \\ (3)_{10} &= (11)_2 \rightarrow F \rightarrow a & (7)_{10} &= (111)_2 \rightarrow F \rightarrow b \end{aligned}$$

formando a palavra $p=abbabaab\dots$

Definição 1. Uma palavra é livre de cubo se evita o padrão $p=xxx$, ou seja, não contém três fatores idênticos adjacentes.

Teorema 1. A palavra de Thue-Morse é livre de cubo.

Aplicação em xadrez².

Para prevenir que uma partida de xadrez se estenda infinitamente, criou-se regras de empate, em particular, a chamada regra alemã: se uma jogada

acontecer três vezes sucessivamente, é declarado empate. Entretanto, em 1929, Max Euwe³ mostrou um contraexemplo à regra alemã. Considere as jogadas J_1, J_2, J_3, J_4 e o mapeamento $tm(x)$ descritos a seguir.

$$\begin{aligned} J_1 &= Ng1-f3, Ng8-f6; & J_3 &= Nf3-g1, Nf6-g8 \\ J_2 &= Nb1-c3, Nb8-c6; & J_4 &= Nc3-b1, Nc6-b8 \end{aligned}$$

$$tm(x) = \begin{cases} 'a', & \text{se } x = J_1 \text{ ou } x = J_3; \\ 'b', & \text{se } x = J_2 \text{ ou } x = J_4 \end{cases}$$

Em que N representa a peça cavaleiro/cavalo, [a..f][1..8], as posições no tabuleiro e x, uma jogada.

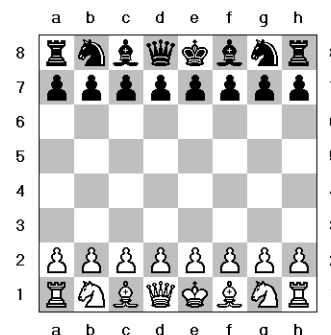


Figura 1. Um tabuleiro de xadrez, numerado e em configuração inicial.

Considere a sequência de jogadas e seu mapeamento

$$\wp = J_1 J_2 J_4 J_3 J_2 J_1 J_3 J_4 J_1 J_2 J_4 J_3 J_2 J_1 J_3 J_4 J_1 \dots \text{ e } tm(\wp) = abbabaababbabaaba\dots,$$

que é justamente a sequência de Thue-Morse. Essa, por sua vez, é livre de cubo. Logo, existe uma partida \wp que nunca satisfaz a regra alemã de empate e, portanto, infinita.

Conclusão

Neste trabalho, exploramos conteúdos clássicos de teoria da computação, normalmente com conceitos densos, relacionando-os com aplicações cotidianas e interessantes na resolução de problemas úteis.

Agradecimentos

Agradecemos ao suporte do CNPq.

[1] Berstel, J.; Perrin D. *The origins of combinatorics on words*. European Journal of Combinatorics: 28(3), pp. 996-1022, 2013.

[2] <http://blog.zacharyabel.com/2012/02/chess-bored>

[3] https://pt.wikipedia.org/wiki/Max_Euwe