doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

Introdução à otimização linear e aplicações

Lucas Galdino de Camargo*, Dra. Kelly Cristina Poldi.

Resumo

Problemas de Otimização Linear ou Programação Linear (PL) são problemas de otimização nos quais a função objetivo e as restrições são todas lineares. Muitos problemas práticos em pesquisa operacional podem ser expressos como problemas de PL. Há vários métodos de solução na literatura para resolução de problemas de otimização linear, dentre eles, destacam-se o Método Simplex e Método de Pontos Interiores. Neste trabalho, discute-se o Método Simplex, sua fundamentação teórica, algoritmo e implementação (utilizando os pacotes de otimização AMPL[1] e GAMS[2]).

Palavras-chave:

Otimização linear, programação linear, modelagem matemática.

Introdução

Problemas de Programação Linear são problemas de otimização onde todas as restrições, bem como a função objetivo, são lineares. Qualquer problema de PL pode ser escrito matricialmente na chamada forma padrão:

Minimizar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Sujeito à: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

No Método Simplex, a solução é procurada a partir dos vértices da região factível, variando os conjuntos de restrições ativas e inativas, até encontrar o ponto ótimo, que minimiza f.

Problema-Exemplo

Um fabricante de geladeiras precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada. Uma pesquisa de mercado indicou que, no máximo, 1.500 unidades do modelo de luxo e 6.000 unidades do modelo básico podem ser vendidas no próximo mês. A empresa dispõe de uma força de trabalho de 25.000 homens-hora por mês. Cada modelo de luxo requer dez homens-hora e cada modelo básico requer oito homens-hora para ser montado. Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada e considere que a capacidade de produção desta linha seja de 4.500 geladeiras por mês. O lucro unitário do modelo de luxo é de \$100,00, e do modelo básico é de \$50,00. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

Resultados e Discussão

Primeiramente, escrevemos o modelo de otimização para o problema descrito acima, que fica:

Maximizar $f(x_{luxo}, x_{básico}) = 100\, x_{luxo} + 50\, x_{básico}$

Sujeito à:

$$10\, x_{luxo} + 8\, x_{básico} \leq 25.000$$
$$x_{luxo} + x_{básico} \leq 4.500$$
$$0 \leq x_{luxo} \leq 1.500 \text{ e } 0 \leq x_{básico} \leq 6.000$$

onde x_{luxo} e $x_{básico}$ são as quantidades a serem produzidas dos modelos luxo e básico, respectivamente.

Resolvemos o problema de mix de produção de geladeiras através dos pacotes de otimização GAMS e AMPL - vide figuras 1 e 2, respectivamente.

```
              LOWER      LEVEL      UPPER     MARGINAL

luxo            .      1500.000     +INF        .
basico          .      1250.000     +INF        .
Optimal solution found.
Objective :          212500.000000
```

Figura 1. Resolução do problema-exemplo pelo GAMS.

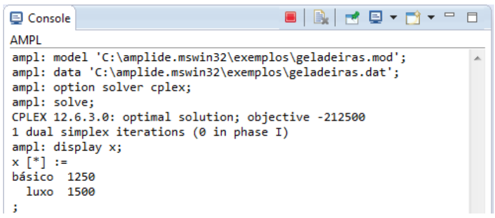

Figura 2. Resolução do problema-exemplo pelo AMPL. Os resultados encontrados foram os mesmos, sendo encontrados também através de resolução gráfica.

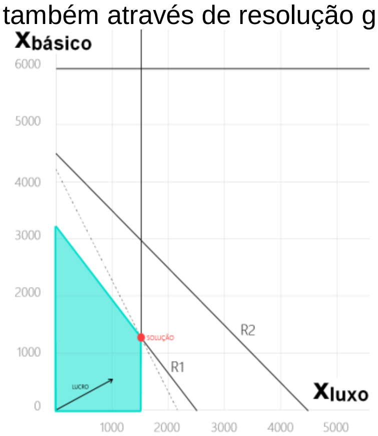

Figura 3. Resolução gráfica. Em azul: região factível.

O vetor lucro aponta para a direção de maior crescimento da função objetivo e procuramos, portanto, pelo vértice ótimo nesta direção, encontrando o ponto ótimo (x^*_{luxo} = 1.500, $x^*_{básico}$ = 1.250), para o qual a função objetivo assume o valor \$212.500,00.

Conclusões

Pudemos sintetizar com um problema bem simples os principais resultados envolvidos na teoria simplex, explorando a modelagem matemática e os aspectos teóricos e computacionais deste método para PL.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Profª. Dra. Kelly Cristina Poldi, pela oportunidade e por todo o apoio, e ao CNPq, que financiou e viabilizou a pesquisa.

REFERÊNCIAS

[1] Fourer, R.; Gray, D. M.; Kernighan, B. W. (2003). *AMPL: a modeling language for mathematical programming* 2ª ed. Thomson.

[2] Rosenthal, R. E. *A GAMS Tutorial by Richard E. Rosenthal*. https://www.gams.com/latest/docs/userguides/userguide/_u_g__tutorial.html

[3] Arenales, M. N.; Armentano, V.; Morabito, R.; Yanasse, H. (2006). *Pesquisa operacional.* Campus, 1ª ed. Rio de Janeiro.

[4] Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J.; Sherali, H. D. (2010). *Linear programming and network flows.* John Wiley & Sons. 4ª ed. New York.

[5] Goldbarg, M. C.; Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear – modelos e algoritmos.* Campus, 2ª ed. Rio de Janeiro.