doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Modelos de teorias de gauge em mecânica clássica

Aline Leite Vilela D'Oliveira*

Resumo
Esse projeto teve como objetivo o estudo da teoria de fibrados principais e conexões. A partir de tal formalismo estudamos um exemplo de teoria de gauge em mecânica clássica, o movimento de um carro ao estacionar. Tal exemplo ilustra de maneira bastante completa a teoria de fibrados e conexões, o que foi útil para a compreensão mais profunda desses conceitos abstratos.

Palavras-chave:
Fibrados principais e conexões, teorias de gauge, fases geométricas.

Introdução

Do ponto de vista matemático, as teorias de gauge podem ser entendidas com o formalismo da teoria de fibrados e conexões. Nesse projeto, estudamos tal formalismo e, a partir do exemplo do movimento do carro, exemplificamos tal teoria de forma mais concreta.

Resultados e Discussão

Começamos com alguns conceitos teóricos [1].

Definição 1: Um fibrado principal $P(M,G,\pi)$ consiste das variedades diferenciáveis P e M, do grupo de Lie G e da projeção sobrejetora diferenciável $\pi : P \to M$, onde:

1 - G age livremente e diferencialmente em P à direita.
2 - M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência induzida por G.
3 - P é localmente trivial: ∃ uma cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ de M, onde ∀ $i \in I$ há um difeomorfismo $T_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ (trivialização local). Ainda, ∀ $p \in \pi^{-1}(U_i)$ temos $T_i(p) = (\pi(p), s_i(p))$, com $s_i(pg) = s_i(p)g$.

Definição 2: Definimos o espaço vertical V_pP em $p \in P$ como $V_pP = \{v \in T_pP / (\pi_*)_p v = 0\}$.

Definição 3: Sejam $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G, $A \in \mathfrak{g}$, $p \in P$ e $\gamma : \mathbb{R} \to G$ uma curva diferenciável qualquer tal que $\gamma(0) = e$ e $\frac{d}{dt}(\gamma(t))|_{t=0} = A$. Definimos o vetor $A_p^\# \in V_pP$ como: $A_p^\# = \frac{d}{dt}(p \cdot \gamma(t))|_{t=0}$.

Definição 4: Uma conexão associa a cada $p \in P$ um subespaço H_pP de T_pP tal que:

1 - $T_pP = V_pP \oplus H_pP$.
2 - Dados $g \in G$ e $p \in P$ então $(\varphi_{g*})_p H_pP = H_{pg}P$.
3 - Dados X um campo vetorial em P e $p \in dom(X)$, existem $X^H \in H_pP$ e $X^V \in V_pP$ tais que $X_p = X^H + X^V$.

Equivalentemente podemos implementar o conceito de conexão através de uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(p,\mathfrak{g})$, que permite achar as componentes vertical e horizontal de vetores em T_pP.

Definição 6: Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave. A curva $\bar{\gamma} : [0,1] \to P$ é um levantamento horizontal se:

1 - $\pi \circ \bar{\gamma} = \gamma$.
2 - Qualquer vetor tangente a $\bar{\gamma}(t)$ pertence a $H_{\bar{\gamma}(t)}P$.

Teorema 2: Sejam $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave em M e $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Existe um único levantamento horizontal $\bar{\gamma}(t)$ em P tal que $\bar{\gamma}(0) = p_0$.

Fizemos o exemplo do estacionamento do carro representado na figura (1). O espaço de configurações total é P e o espaço dos possíveis formatos do carro é M, com coordenadas $(\alpha,\beta,x,y,\varphi)$ e (α,β). Assim, temos a projeção $\pi : P \to M$, $(\alpha,\beta,x,y,\varphi) \mapsto (\alpha,\beta)$.

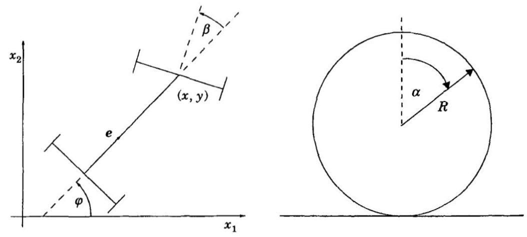

Figura 1. Coordenadas $(\alpha,\beta,x,y,\varphi)$. Retirada de [2].

Dado um elemento $\mathcal{B} \in E(2)$ podemos definir a ação $\varphi_{\mathcal{B}} : P \to P$ como o movimento rígido $\mathcal{B}$ do vetor $\hat{e}$ da figura (1). Assim, $P(M, E(2), \pi)$ é um fibrado principal.

Impondo que a roda não deslize na pista, temos uma conexão onde os vetores que geram o espaço horizontal, H_α e H_β, dã as direções permitidas para o movimento do carro em P. Seja $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ uma curva em . Seu levantamento horizontal é a curva dada por $\frac{d}{dt}\bar{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\alpha(t)\, H_\alpha + \frac{d}{dt}\beta(t)\, H_\beta$ com condição inicial (x_0, y_0, φ_0).

Nosso objetivo é estacionar o carro, ou seja, movê-lo lateralmente. Assim, realizamos um ciclo infinitesimal em P gerado pelos vetores H_α e $[H_\alpha, H_\beta]$. Seja $\varphi_t^{[H_\alpha,[H_\alpha,H_\beta]]}$ o fluxo do campo vetorial $[H_\alpha,[H_\alpha,H_\beta]]$ em P, e $(\alpha_0,\beta_0,x_0,y_0,\varphi_0) \in P$ a posição inicial do carro. Então, a posição final do carro será: $\varphi_{\varepsilon^4}^{[H_\alpha,[H_\alpha,H_\beta]]}(\alpha_0,\beta_0,x_0,y_0,\varphi_0)$ $= (\alpha_0, \beta_0, x_0 + \varepsilon^4 \frac{R^2}{l}\, sin\, \varphi_0, y_0 - \varepsilon^4 \frac{R^2}{l} cos\, \varphi_0, \varphi_0)$.

Logo, conseguimos estacionar o carro a partir de um ciclo de movimentos permitidos em P.

Conclusões

Utilizando os conceitos de fibrados principais e conexões fizemos o exemplo do estacionamento do carro, onde a conexão carrega a informação do não deslizamento da roda do carro na pista.

Esse formalismo pode ser aplicado a outros sistemas físicos. Como, por exemplo, o efeito swimming de corpos articulados em espaços curvos.

[1] Kobayashi S, Nomizu K. Foundations of differential geometry. Vol 1. New York: Interscience publishers; 1963.
[2] Fecko M. Gauge-potential approach to the kinematics of a moving car. Il Nuovo Cimento 1996; 111B(11): 1315-1332.