doi:10.20396/revpibic.v0i0.id

XXVI Congresso de Iniciação Científica Unicamp
17 a 19 de outubro Campinas | Brasil

Sobre a Existência de Semântica Finita para os Fragmentos da Lógica Intuicionista

Felipe S. Albarelli*, Rodolfo C. E. Biraben.

Resumo

Em um artigo de 1932, Gödel prova que a lógica proposicional intuicionista não pode ser vista como um sistema lógico multivalorado finito. Isso é feito mostrando que não existe uma função valoração com contradomínio finito que atribua a todas as fórmulas intuicionistas deriváveis, e somente essas, um valor distinguido. O presente trabalho consiste em generalizar a prova de Gödel provando, para certos fragmentos da lógica proposicional intuicionista, se estes podem ou não serem vistos como uma lógica multivalorada finita.

Palavras-chave:
Lógica intuicionista, Lógica multivalorada, Fragmentos da lógica intuicionista

Introdução

A lógica proposicional intuicionista (LPI) é um sistema de lógica simbólica em que, por exemplo, não é possível derivar instâncias do terceiro excluído ou da eliminação da dupla negação. Outra propriedade é que, diferentemente da lógica clássica, na intuicionista a implicação, negação, conjunção e disjunção não são interdefiníveis. Neste trabalho vamos considerar as lógicas resultantes de subconjuntos dos conectivos da LPI.

É bem sabido que a lógica clássica pode ser representada com uma semântica bivalente. É natural se perguntar se a LPI poderia ser representada como uma lógica tri-valorada, quadri-valorada, ou n-valorada para algum numero natural n. Essa questão foi resolvida por Gödel em 1932, que provou que não é possível encontrar uma função v: $F \rightarrow M$, em que F é o conjunto das fórmulas proposicionais e M um conjunto finito de valores de verdade, um subconjunto D de M de valores designados e uma interpretação dos conectivos intuicionistas de tal modo que, para qualquer fórmula φ, $v(\varphi) \in D$ se e somente se φ é derivável na LPI.

No presente trabalho consideramos os distintos fragmentos da LPI, fornecendo uma semântica finita ou provando que não existe uma. No caso da não existência, isso é provado generalizando a prova original de Gödel.

Resultados e Discussão

O começo da pesquisa consistiu no estudo e resolução de exercícios dos capítulos 1, 2 e 4 do livro *Introduction to Lattices and Order* (2002) de B. A. Davey e H. A. Priestley, com o objetivo de introduzir o orientando a teoria dos retículos. Após isso, o artigo original de Gödel foi estudado para então o orientando e orientador trabalharem para generalizar a prova para alguns fragmentos da LPI.

A estratégia da prova de Gödel é mostrar que, para qualquer número de valores de verdade escolhido para uma semântica, é possível encontrar uma fórmula φ que receberá um valor designado mas não é derivável na LPI, o que prova que nenhuma semântica com um número finito de valores de verdade pode servir como modelo da LPI.

Para generalizar a prova para um fragmento F da LPI, é preciso construir uma fórmula esquema φ na linguagem de F de tal modo que φ não seja derivável pela LPI e receba um valor designado em qualquer valoração finita.

Porém, nem todos os fragmentos da LPI possuem essa propriedade, para alguns é possível encontrar uma semântica com valores finitos.

Pode-se definir que um fragmento F contém um fragmento G quando F contém todos os conectivos de G. Uma observação interessante é que se um certo fragmento F não possui semântica finita, então todos os fragmentos que contém F também não possuem, pois a sentença usada para realizar a prova no estilo Gödel em F pode ser repetida nos outros fragmentos. A contrapositiva dessa proposição permite concluir que todos os fragmentos de uma lógica com semântica finita possuem semântica finita.

Conclusão

O estudo dos fragmentos da LPI permitiu ao bolsista um modo de se habituar a métodos de prova lógicos e algébricos, ferramentas muito importantes para a atividade acadêmica em lógica e filosofia.

Agradecimentos

Ao Rodolfo C. E. Biraben, por ter me orientado sempre com dedicação e paciência.

Essa pesquisa teve apoio financeiro do PIBIC – SAE/UNICAMP.

Davey, B. A.; Priestley, H. A. *Introduction to Lattices and Order.* 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Gödel, K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien,* pp 65-66, 1932.

(cc) BY-NC-ND