



## Projeto FAEPEX

---

### Bilocalidade em cenários tripartidos

---

AUTOR : PEDRO NÓBREGA LAUAND  
 ORIENTADOR : RAFAEL LUIZ DA SILVA RABELO

#### Introdução

Começaremos com uma breve introdução em bilocalidade para cenários tripartidos. Suponha que nos encontramos em um cenário de Bell tripartido e associaremos a cada parte um observador fictício : Alice, Bob e Charlie.

Sob uma descrição convencional de variáveis ocultas, as variáveis denominadas locais podem ser decompostas como

$$p_{abc|xyz} = \sum_{\alpha\beta\gamma} q_{\alpha\beta\gamma} \delta_{a,\alpha_x} \delta_{b,\beta_y} \delta_{c,\gamma_z}, \quad (1)$$

onde  $\alpha\beta\gamma$  representam os resultados de todas as possíveis perguntas de todas as partes.

Em um cenário de bilocalidade iremos mudar a estrutura causal desse modelo de variáveis ocultas. Suponha agora que possuímos duas fontes  $S_1$  e  $S_2$ .  $S_1$  distribui partículas entre Alice e Bob,  $S_2$  distribui partículas entre Bob e Charlie. Alice e Charlie possuem medições sobre seus respectivos sistemas e Bob pode fazer uma medição conjunta em seu sistema compartilhado com Alice e Charlie. Para o caso em

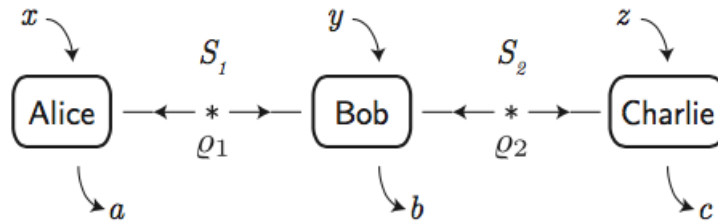


Figura 1:  $\rho_1$  representa a primeira partícula entre Alice e Bob. E,  $\rho_2$  representa a segunda partícula entre Charlie e Bob.

que temos duas fontes, podemos atribuir à cada fonte uma variável oculta  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . E dizemos que o comportamento  $\mathbf{p}$  é local se

$$p_{abc|xyz} = \int \int d\lambda_1 d\lambda_2 \tilde{p}_{\lambda_1, \lambda_2} p_{a|x\lambda_1} p_{b|y\lambda_1 \lambda_2} p_{c|z\lambda_2} \quad (2)$$

onde estamos integrando sobre todos os possíveis pares  $(\lambda_1, \lambda_2)$  que poderiam gerar correlações entre os sistemas.

Primeiro mostremos que essa formulação é equivalente à abordagem convencional. Com efeito, como as probabilidades de Alice não dependem da variável oculta  $\lambda_2$  temos que  $p_{a|x\lambda_1} = p_{a|x\lambda_1\lambda_2}$ . Analogamente,  $p_{c|z\lambda_2} = p_{c|z\lambda_1\lambda_2}$ . Com isso temos,

$$p_{abc|xyz} = \int \int d\lambda_1 d\lambda_2 \tilde{p}_{\lambda_1, \lambda_2} p_{a|x\lambda_1\lambda_2} p_{b|y\lambda_1\lambda_2} p_{c|z\lambda_1\lambda_2},$$

tomando  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$

$$p_{abc|xyz} = \int \int d\lambda \tilde{p}_\lambda p_{a|x\lambda} p_{b|y\lambda} p_{c|z\lambda}.$$

Logo, a abordagem com duas fontes continua sendo equivalente à convencional. Associamos  $\alpha$  à  $\lambda_1$ ,  $\beta$  ao par  $(\lambda_1, \lambda_2)$  e  $\gamma$  à  $\lambda_2$ . De fato, recuperaremos a equação (2.1), pois  $p_{a|x\lambda_1} = \sum_\alpha q_{\alpha|\lambda_1} \delta_{a,\alpha_x}$ ,  $p_{b|y\lambda_1\lambda_2} = \sum_\beta q_{\beta|\lambda_1\lambda_2} \delta_{b,\beta_y}$  e  $p_{c|z\lambda_2} = \sum_\gamma q_{\gamma|\lambda_2} \delta_{c,\gamma_z}$ . Assim podemos definir

$$q_{\alpha\beta\gamma} = \int \int d\lambda_1 d\lambda_2 \tilde{p}_{\lambda_1\lambda_2} q_{\alpha|\lambda_1} q_{\beta|\lambda_1\lambda_2} q_{\gamma|\lambda_2}. \quad (3)$$

Até agora estamos simplesmente mudando nossa abordagem frente a localidade tripartida. Suponhamos agora que  $S_1$  e  $S_2$  são fontes independentes, se assim for é natural que essa característica seja refletida no modelo local, obtendo assim

$$\tilde{p}_{\lambda_1, \lambda_2} = p'_{\lambda_1} p''_{\lambda_2}. \quad (4)$$

Antes de entrarmos em detalhes nas consequências dessa suposição, é importante reforçarmos a ideia de que é apenas uma suposição, não é algo que segue diretamente dos princípios de localidade. De fato, pode ocorrer que o passado comum entre as fontes esteja de alguma forma correlacionado de acordo com localidade. No entanto, temos fortes evidências experimentais que essa configuração pode ser atingida. Um exemplo disso seria o experimento de entanglement swapping onde duas fontes, que nunca interagiram (podem ser de marcas diferentes, feitas em diferentes partes do mundo ou serem até carregadas por fontes elétricas distintas), geram pares de fótons emaranhados e, com a escolha certa de medições para as partes, resultam em um sistema emaranhado entre as partes que nunca interagiram. As evidências de que isso pode ser atingido experimentalmente é o que motiva essa nossa hipótese.

Mostraremos agora, como a independência das fontes se traduz em termos dos pesos  $q_{\alpha\beta\gamma}$ . Antes disso definimos as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} q_{\alpha\gamma} &= \sum_{\beta} q_{\alpha\beta\gamma} \\ q_{\alpha} &= \sum_{\gamma\beta} q_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \quad (5)$$

e, analogamente para  $q_{\gamma}$ .

**Teorema 1.** *Um comportamento  $\mathbf{p}$  é dito bilocal se, e somente se possuir decomposição local tal que  $q_{\alpha\gamma} = q_{\alpha} q_{\gamma} \quad \forall \alpha\gamma$*

A interpretação do resultado acima nos diz que se as estratégias  $\alpha$  e  $\gamma$  são oriundas de fontes independentes então suas probabilidades não serão correlacionadas. Podemos ver também que o conjunto de comportamentos bilocais está contido no politopo local. Os pontos extremos desse politopo, i.e., as estratégias determinísticas são também bilocais, mas uma mistura dessas estratégias não é necessariamente bilocal. O conjunto bilocal não é, portanto, convexo e não conseguiremos formalizar desigualdades Bell lineares como no caso local. Mostraremos a seguir que conseguimos desigualdade não-lineares que são satisfeitas pelos comportamentos bilocais.

## Desigualdades de Bilocalidade

Para um dado comportamento bilocal (ou local) a decomposição dada em termos de  $q_{\alpha\beta\gamma}$  geralmente não é única, iremos apresentar os correlatores  $e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}$  para que possamos mostrar onde se encontram esses graus de liberdades internos na decomposição e conseguirmos tratá-la de uma forma ainda mais prática. Iremos nos restringir ao caso de perguntas e respostas binárias. Começaremos apresentando um pouco da notação, sabemos que cada estratégia é do tipo  $\alpha = \alpha_0\alpha_1$  e analogamente para os outros símbolos. Definimos  $\bar{i} = i_0i_1$ ,  $\bar{j} = j_0j_1$  e  $\bar{k} = k_0k_1$  e os coeficientes

$$e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = \sum_{\alpha\beta\gamma} (-1)^{\bar{\lambda}\cdot\bar{v}} q_{\alpha\beta\gamma}, \quad (6)$$

onde  $\bar{\lambda}\cdot\bar{v} = \alpha\cdot\bar{i} + \beta\cdot\bar{j} + \gamma\cdot\bar{k}$ , em que  $\alpha\cdot\bar{i} = \alpha_0i_0 + \alpha_1i_1$ . Os coeficientes  $\{e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\}$  são equivalente aos coeficientes  $\{q_{\alpha\beta\gamma}\}$ , a equação acima é na verdade uma transformada de Fourier discreta. Podemos inverter essa transformação obtendo

$$q_{\alpha\beta\gamma} = 2^{-6} \sum_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} (-1)^{\bar{\lambda}\cdot\bar{v}} e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}, \quad (7)$$

Seja  $A_x = (-1)^{\alpha_x}$  para  $x \in \{0, 1\}$ , e analogamente para  $B_y$  e  $C_z$  para uma dada estratégia  $\alpha\beta\gamma$ . Teremos

$$e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = \langle A_0^{i_0} A_1^{i_1} B_0^{j_0} B_1^{j_1} C_0^{k_0} C_1^{k_1} \rangle_{\{q_{\alpha\beta\gamma}\}}.$$

Agora para quando temos  $\bar{i} \neq \bar{1}$ ,  $\bar{j} \neq \bar{1}$  e  $\bar{k} \neq \bar{1}$  (onde  $\bar{1} = 11$ ). Teremos no máximo um termo  $A_x$ ,  $B_y$  e  $C_z$  aparecendo de forma não-trivial neste valor esperado. Podemos então obter os coeficientes  $\{e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}\}$  diretamente do comportamento  $\mathbf{p}$ :

$$e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = \langle A_0^{i_0} A_1^{i_1} B_0^{j_0} B_1^{j_1} C_0^{k_0} C_1^{k_1} \rangle_{\mathbf{p}}. \quad (8)$$

para  $\bar{i} \neq \bar{1}$ ,  $\bar{j} \neq \bar{1}$  e  $\bar{k} \neq \bar{1}$ , modificando agora  $A_x = (-1)^{a_x}$  onde  $a_x \in \{0, 1\}$  é a resposta da Alice para a pergunta  $x$ . Teremos, por exemplo,  $e_{10,10,10} = \langle A_0 B_0 C_0 \rangle_{\mathbf{p}}$ ,  $e_{10,00,00} = \langle A_0 \rangle_{\mathbf{p}}$  e  $e_{00,00,00} = 1$  por normalização.

Por outro lado, quando tivermos  $\bar{i} = \bar{1}$ ,  $\bar{j} = \bar{1}$  ou  $\bar{k} = \bar{1}$  não poderemos obter esses coeficientes pelo comportamento  $\mathbf{p}$ , pela incompatibilidade dos resultados  $A_0$  e  $A_1$ ,  $B_0$  e  $B_1$ ,  $C_0$  e  $C_1$ . Esses coeficientes serão chamados de graus internos de liberdade do modelo local, somente restritos pela condição de não negatividade, i.e.,

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \quad \sum_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} (-1)^{\bar{\lambda}\cdot\bar{v}} e_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \geq 0$$

Finalmente, voltando para a condição de bilocalidade, na representação de correlatores é que

$$e_{\bar{i}\bar{0}\bar{k}} = e_{\bar{i}\bar{0}\bar{0}} e_{\bar{0}\bar{0}\bar{k}} \quad \forall \bar{i}, \bar{k}.$$

Iremos agora estudar o cenário (2,2), i.e., Alice, Bob e Charlie possuem perguntas e respostas binárias. Logo,  $x, y, z, a, b, c \in \{0, 1\}$ . Defina para uma dada distribuição  $\mathbf{p}^{22}$  os termos:

$$\langle A_x B_y C_z \rangle_{\mathbf{p}^{22}} = \sum_{a,b,c} (-1)^{a+b+c} \mathbf{p}_{a,b,c|x,y,z}^{22}, \quad (9)$$

as seguintes combinações lineares desses termos  $I^{22}$ ,  $J^{22}$

$$\begin{aligned} I^{22} &= \frac{1}{4} \sum_{x,z \in \{0,1\}} \langle A_x B_0 C_z \rangle_{\mathbf{p}^{22}} \\ J^{22} &= \frac{1}{4} \sum_{x,z \in \{0,1\}} (-1)^{x+z} \langle A_x B_1 C_z \rangle_{\mathbf{p}^{22}}, \end{aligned} \quad (10)$$

**Lemma 2.** *Se  $\mathbf{p}^{22}$ , distribuição de probabilidade do cenário (2,2), é bilocal. Então*

$$\sqrt{|I^{22}|} + \sqrt{|J^{22}|} \leq 1 \quad (11)$$

Note que essa é somente uma condição necessária para bilocalidade, i.e., qualquer comportamento bilocal irá cumprir essa desigualdade, entretanto existem comportamentos somente locais que também irão cumpri-la. Podemos também estudar o caso (1,4). Nesta configuração Alice e Charlie possuem medições e resultados binários e Bob faz uma medição com 4 possíveis resultados. Podemos representar as repostas de Bob por  $\bar{b} = b^0 b^1 = 00, 01, 10$  ou  $11$ . E as correlações como  $\mathbf{p}_{a,b^0 b^1,c|x,z}^{14}$ . Primeiramente, definimos

$$\langle A_x B^y C_z \rangle_{\mathbf{p}^{14}} = \sum_{a,b^0 b^1,c} (-1)^{a+b^y+c} \mathbf{p}_{a,b^0 b^1,c|x,z}^{14} \quad (12)$$

E definimos  $I^{14}$  e  $J^{14}$ ,

$$\begin{aligned} I^{14} &= \frac{1}{4} \sum_{x,z \in \{0,1\}} \langle A_x B^0 C_z \rangle_{\mathbf{p}^{14}}, \\ J^{14} &= \frac{1}{4} \sum_{x,z \in \{0,1\}} (-1)^{x+z} \langle A_x B^1 C_z \rangle_{\mathbf{p}^{14}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Agora podemos ver que, analogamente ao caso anterior.

**Lemma 3.** *Se  $\mathbf{p}^{14}$ , distribuição de probabilidade do cenário (1,4), é bilocal. Então*

$$\sqrt{|I^{14}|} + \sqrt{|J^{14}|} \leq 1$$

Note que o cenário (2,2) e o cenário (1,4) estão intimamente ligados e pode-se obter um comportamento  $\mathbf{p}^{22}$  a partir de um  $\mathbf{p}^{14}$ , mas a recíproca dessa afirmação não é verdadeira. De fato, no caso (2,2) os bits  $b^0$  e  $b^1$  podem ser resultados de medições incompatíveis e geralmente não podem ser revelados de forma simultânea para definirmos  $\bar{b}$ . O experimento de swap de emaranhamento é um caso particular desse cenário e é de nosso interesse. Esse cenário será abordado novamente mais adiante.

## Novo critério

Após estudarmos as desigualdades  $D_{IJ}$  conseguimos um critério suficiente para a detecção de comportamentos não-bilocais. Entretanto, essa abordagem ainda deixa um pouco a desejar pois não caracteriza totalmente o conjunto de comportamentos bilocais.

Nesta secção iremos fazer uma nova tentativa : desenvolver um critério que seja melhor que o adotado anteriormente. Ao considerarmos cenários de bilocalidade devemos ter em mente duas coisas : localidade e independência na distribuição de variáveis ocultas. E nossa maior dificuldade é no segundo aspecto. Podemos reformular o problema da medição de bilocalidade como um problema QCQP (Quadratically constrained quadratic program). Primeiramente, iremos definir esse problema de forma mais precisa.

Um QCQP é um problema de otimização no seguinte formato

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^T Q_0 x + a_0^T x \\ &\text{subject to} \\ &x^T Q_i x + a_i^T x \leq 0 \quad i \in \{1, \dots, m\} \\ &Ax = b, \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $Q_0, \dots, Q_m \in S_n$ . Vale lembrar que se  $Q_i \geq 0 \quad \forall i$ , i.e., se todas as matrizes  $Q$  forem positivas semi-definidas o problema de otimização se torna convexo. Se as matrizes  $Q$  forem indefinidas o problema não é convexo. Vemos que o problema de acharmos uma decomposição explícita de bilocalidade é equivalente ao seguinte problema de factibilidade

$$\begin{aligned} &\text{find } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \\ &\text{such that} \\ &f_i(\mathbf{q}) = 0 \quad i \in \{1, \dots, l\} \\ &A\mathbf{q} = \mathbf{p} \\ &\mathbf{q} \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Como as restrições  $f_i$  são formas quadráticas sobre a variável  $\mathbf{q}$ , temos que o problema original é um QCQP não-convexo. Nesta abordagem dependemos apenas de resolver o QCQP de forma eficiente. Nesse sentido, nos dias de hoje já existem solvers que conseguem eficientemente resolver problemas quadráticos não-convexos. O solver de nossa escolha nesse projeto foi o *Gurobi* que possui um novo solver bilinear na versão 9.0 feito, justamente, para atacar esses tipos de problemas.

## Resultados Finais

Iremos apresentar um exemplo muito instrutivo. Claramente, o comportamento do nosso cenário de Bell pode ser obtido através de um estado quântico e um conjunto de medições para Alice, Bob e Charlie. Considere o caso (1,4), onde Bob possui uma medição projetiva completa na base de Bell. E, Alice e Charlie possuem observáveis com respostas binárias. Escolheremos o estado compartilhado entre as partes como duas cópias do estado

$$\rho = v |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1-v) |01\rangle\langle 01|. \quad (16)$$

De forma que, Bob compartilha uma cópia de  $\rho$  com Alice e outra com Charlie. Essa família de estados entrópicos é comumente chamada de *Estados de Werner com ruído colorido*. As perguntas do Bob serão os projetores na base de Bell e as perguntas de Alice e Charlie serão observáveis, cujos efeitos podem ser parametrizados da seguinte maneira

$$F_{0|x} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad \text{e} \quad F_{1|x} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \vec{r} \cdot \vec{\sigma}).$$

Onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  são as matrizes de Pauli e  $\vec{r}$  é um vetor radial arbitrário em uma esfera unitária tridimensional, também denominado *vetor de Bloch*. Sabemos que  $\vec{r}$  depende apenas de um ângulo polar  $\theta \in [0, \pi]$  e um ângulo azimutal  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Como o processo é análogo para Charlie, podemos então parametrizar os observáveis de ambas as partes com os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$

$$\mathcal{O}^x = \{F_{0|x}, F_{1|x}\} = \mathcal{O}_{\varphi, \theta}^x.$$

Podemos obter o comportamentos pela *regra de Born*

$$p(abc|xz) = \text{Tr}(\psi(\mathcal{O}_a^x \otimes E_b \otimes \mathcal{O}_c^z)),$$

onde  $\psi = \rho \otimes \rho$  é o estado que descreve o sistema e  $\mathcal{O}_a^x$ ,  $E_b^y$  e  $\mathcal{O}_c^z$  atuam no qubit da Alice, 2 qubits do Bob e qubit do Charlie respectivamente.

Sorteando diversos parâmetros para diferentes visibilidades, conseguimos um conjunto de medições que consegue nos dar comportamentos muito interessantes. Considere os seguintes parâmetros para os observáveis

- $\varphi = 3.987701814701555$  e  $\theta = 2.269366898278137$  para  $x = 0$
- $\varphi = 1.5376255593052797$  e  $\theta = 2.343536159060366$  para  $z = 0$
- $\varphi = 4.758465625923057$  e  $\theta = 0.7244852532334988$  para  $x = 1$
- $\varphi = 1.69635414303493$  e  $\theta = 0.18004794259238285$  para  $z = 1$

conseguimos verificar que para  $v \geq 0.86$  teremos um comportamento não-bilocal. Além disso, só existirá violação das  $D_{IJ}$  para  $v > 0.92$ . Dessa maneira, conseguimos ver uma clara vantagem que a nossa segunda abordagem leva em relação a primeira, detectando pontos que não podem ser discriminados pelas desigualdades de não-bilocalidade. A forma na qual obtemos esse resultado é algo que ainda não tinha sido visto na literatura, ainda que pontos do politopo local com essa natureza já tenham sido encontrados com a utilização de Machine Learning para o processo de discriminação.

Concluimos que o projeto discutido tenta dar pequenos passos em novas direções do cenário de redes quânticas e em Bilocalidade de Bell. A utilização de métodos de otimização não-convexos ainda é algo novo e pouco explorado no contexto de Fundamentos Matemáticos da Mecânica Quântica, esperamos que nos próximos projetos tenhamos resultados ainda melhores e mais inovadores. Infelizmente, devido ao limite de páginas existem uma série de considerações técnicas que poderiam ter sido feitas mas foram deixadas no Relatório Final.