UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Resumo PIBIC

RESUMO DO TRABALHO DE ÁLGEBRAS DE LIE TRIDIMENSIONAIS

ORIENTANDO: Vinicius Von Ah Davanço

ORIENTADOR: Adriano João da Silva

1 Resumo

Durante meu trabalho, o objetivo principal foi apresentar ferramentas e com a destas, poder classificar as álgebras de Lie de dimensão ≤ 3.

Para isso, foi apresentado a definição de uma álgebra de Lie e o seu estudo de classificação foi feito com base em seu rank (ver definição abaixo), sua álgebra derivada e constante de estrutura. Afim de despertar o interesse do leitor, vou apresentar abaixo a definição de uma álgebra de Lie, rank e álgebra derivada.

1.1 Definição: *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto (colchete ou comutador).*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Com algumas propriedades que devem ser satisfeitas:

1. É bilinear;

2. É anti-simétrico
$([X, X] = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g} \Rightarrow [X, Y] = -[Y, X] \ \forall \ X, Y \in \mathfrak{g} \ )$

3. A identidade de Jacobi deve ser satisfeita, ou seja, $\forall \ X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,
$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [X, Z]] = 0$

Agora para a álgebra derivada, considere $\mathfrak{g}$ como sendo álgebra de Lie, para dois subconjuntos A e B de $\mathfrak{g}$, usaremos a notação $[A, B]$ para indicar o subespaço gerado por

$$\{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}.$$

1.2 Definição: *Definimos a álgebra derivada, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:*

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$$
$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$$

Uma vez definidas uma álgebra de Lie e álgebra derivada, apresentemos agora o conceito de rank:

1.3 Definição: (Rank) *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, seu posto ou característica(Ou rank, em inglês), é dado pela dimensão do derivado de $\mathfrak{g}$.*

Por fim, vejamos a definição de constante de estrutura:

1.4 Definição: *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Tome X_i, X_j dois elementos quaisquer da base. podemos escrever o colchete entre esses dois elementos como combinação linear da base.*

$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} X_k$.

Os coeficientes c_{ij}^{k} que aparecem acima são denominados constantes de estrutura da álgebra em relação a base fixada.

Veja que não definimos nada muito extraordinário até o presente momento. Gostaríamos de simplificar muito nosso trabalho e apresentar para leitores que não conhecem muito o tema como podemos usar ferramentas que já conhecemos para tópicos mais avançados. Vamos apresentar rapidamente um exemplo de álgebra de Lie de dimensão 2 e expor sua classificação com uso de nossas ferramentas.

Suponhamos que $\mathfrak{g}$ tenha dimensão 2, tomemos uma base qualquer de $\mathfrak{g}$, digamos que tal base seja $\{X_1, X_2\}$.

Uma vez definida nossa base, podemos definir nosso colchete de Lie, queremos que ele seja da forma

$$[X_1, X_2] = \alpha X_1 + \beta X_2 \text{ para algum } \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}$$

Todas as constantes de estrutura diferentes de 0 são determinadas por α e β, notemos que independente de tal fato, nossa álgebra derivada pode ter duas dimensões, zero ou um. Para o caso zero, devemos ter $\alpha = \beta = 0$ então $\mathfrak{g}$ é a única álgebra abeliana bidimensional, a qual denotamos por $L(2, 0)$.

Agora, suponhamos que α ou $\beta \neq 0$, com tal fato temos que a álgebra derivada tem dimensão um, suponhamos então que $\mathfrak{g}$ tem uma base dada por $\{e_1, e_2\}$ de forma que $[e_1, e_2] = e_1$. Ao menos devemos ter α ou β diferentes de 0, por escolha, suponhamos que $\alpha \neq 0$ então temos:

$e_1 = X_1 + \frac{\beta}{\alpha} X_2$ e $e_2 = \frac{1}{\alpha} X_2$.

Esta é uma base de $\mathfrak{g}$ e para o cálculo de seu respectivo colchete temos:

$[e_1, e_2] = [X_1 + \frac{\beta}{\alpha} X_2, \frac{1}{\alpha} X_2] = \frac{1}{\alpha}[X_1, X_2]$

Sabemos o valor do colchete de $[X_1, X_2]$, ele foi definido acima, com isso temos:

$\frac{1}{\alpha}[X_1, X_2] = \frac{1}{\alpha}(\alpha X_1 + \beta X_2) = X_1 + \frac{\beta}{\alpha} X_2 = e_1$

Conseguimos que nossa condição $[e_1, e_2] = e_1$ fosse satisfeita, como queríamos, agora suponhamos $\beta \neq 0$, para tal fato, temos que:

$e_1 = X_2$ e $e_2 = -\frac{1}{\beta} X_1$

Definimos esta como uma base de $\mathfrak{g}$, e temos o colchete:

$[e_1, e_2] = [X_2, -\frac{1}{\beta} X_1] = \frac{1}{\beta}[X_1, X_2] = \frac{1}{\beta}(\beta X_2) = X_2 = e_1$

novamente nossa condição de que $[e_1, e_2] = e_1$ foi satisfeita, com isso temos que existe uma única álgebra de Lie não abeliana de dimensão dois (apresentada acima) denotamos ela por $L(2, 1)$.

O exemplo acima é um dos possíveis casos do nosso estudo a respeito das classificações das álgebras tridimensionais. Note que não houve nenhum procedimento absurdamente difícil, apenas nos utilizamos de definições e conceitos ja vistos em disciplinas iniciais de graduação, com exceção, claro, da definição de álgebra de Lie.