UNICAMP

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Congresso PIBIC

INTRODUÇÃO A ASPECTOS COMBINATÓRIOS EM TEORIA DE REPRESENTAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LIE

ORIENTANDO: KAUÊ ORLANDO PEREIRA

ORIENTADOR: ADRIANO ADREGA DE MOURA

Um dos objetivos principais desse projeto foi estudar os fundamentos de teoria combinatória das álgebras de Lie baseado no conceito de **alcovas**, que podem ser pensadas como delimitações por hiperplanos afins nas **câmaras de Weyl.** A figura abaixo ilustra uma alcova para o sistema de raízes do tipo B_2, onde os demais detalhes podem ser encontrados na página 2 do relatório final.

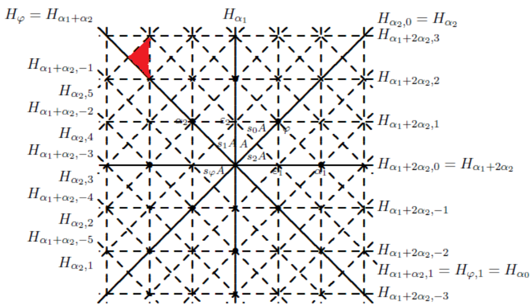

Figura 1: Ilustração de uma alcova em B_2

.

Sabíamos da parte básica sobre álgebras de Lie, que o **grupo de Weyl** age transitivamente nas câmaras de Weyl. Motivados nessa ideia, seria interessante encontrar algum outro grupo que desempenhasse o mesmo papel nas alcovas. Pois bem, tal grupo existe e é chamado de o **grupo de Weyl afim**. Para apresenta-lo, é necessário definir o conceito de **reflexão afim** e **hiperplano afim**. Fixemos uma álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, um sistema de raízes Φ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma bilinear não degenerada em $\mathfrak{h}$.

Definição 0.1. *Seja $\alpha \in \Phi$ e $k \in \mathbb{Z}$, o hiperplano afim com respeito ao par (α, k) é o conjunto*

$$H_{\alpha,k} = \{x \in \mathfrak{h} : \langle x, \alpha \rangle = k\}.$$

Paralelamente, a reflexão afim que envia 0 para $k\alpha^\vee$ é definida como sendo a função

$$s_{\alpha,k} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}, \quad v \mapsto v - (\langle v, \alpha \rangle - k)\alpha^\vee$$

Onde

$$\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}.$$

Com isso, o grupo de Weyl afim W_a é definido como sendo o grupo gerado pelos elementos $s_{\alpha,k}$, com $\alpha \in \Phi$ e $k \in \mathbb{Z}$. Contudo, dado que as alcovas são obtidas por refinamentos nas câmaras de Weyl e, além disso, por estarmos trabalhando com uma estrutura de grupo, surgiam algumas questões, tais como

- Qual a relação entre o grupo de Weyl e o grupo de Weyl afim?
- Teria esse grupo uma estrutura conhecida?

A primeira questão foi sanada quando aprendemos sobre o **reticulado de raízes** e seu **reticulado dual**, que são definidos abaixo.

Definição 0.2. *a) O reticulado de raízes Q de Φ é o conjunto de todas as $\mathbb{Z}$ combinações lineares de elementos de Φ.*
b) Analogamente, o reticulado dual $Q^\vee$ de Φ é o conjunto de todas as $\mathbb{Z}$ combinações lineares de elementos de $\Phi^\vee$, onde

$$\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\}.$$

Mais precisamente, o conteúdo do próximo teorema estabelece as relações entre esses dois grupos.

Teorema 0.3. *Se W é o grupo de Weyl de Φ*

$$W_a \cong Q^\vee \rtimes W.$$

Além disso, felizmente temos uma resposta positiva para a segunda pergunta. Foi estudado que o grupo de Weyl afim poderia ser visto como um grupo de Coxeter (o qual será definido logo abaixo), consequentemente, isso nos permite transportar a teoria de tais grupos para o estudo do grupo de Weyl afim.

Definição 0.4. *Seja S um conjunto. Uma matriz $m : S \times S \to \{1, 2, ...\}$ é dita uma matriz de Coxeter, se as seguintes condições são satisfeitas*
a) $m(s, s') = m(s', s)$, para qualquer $(s, s') \in S \times S$.
b) $m(s, s') = 1 \Leftrightarrow s = s'$.

Definição 0.5. *Dado um grupo G, $e \in G$ seu elemento neutro e S um subconjunto de G, diz-se que o sistema (G, S) é um sistema de Coxeter se*

$$G = \langle s \in S : (ss')^{m(s,s')} = e\rangle$$

onde $m : S \times S \to \{1, 2, ...\}$ é a matriz de Coxeter.
Neste caso, o grupo G é dito ser um grupo de Coxeter.

Denotando por $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l\}$ uma base do sistema de raízes Φ e $s_i := s_{\alpha_i,0}$, tem-se uma apresentação de W_a como grupo de Coxeter:

Teorema 0.6. *Sejam $S := \{s_0, s_1, s_2, ..., s_l\}$ e $1 \in W_a$ o elemento neutro de W_a, então*

$$W_a \cong \langle s_i \in S : (s_i s_j)^{m(s_i,s_j)} = 1, \quad j \in \{1, ..., l\}\rangle.$$

Por fim, rapidamente falaremos das alcovas e iremos estabelecer o primeiro resultado relevante para o inicio da teoria combinatória associada a alcovas. Considere

$$\mathfrak{h}_0 := \bigcup_{\alpha\in\Phi, k\in\mathbb{Z}} H_{\alpha,k}$$

definimos uma **alcova** como sendo uma componente conexa de $\mathfrak{h}_0$, além disso, o conjunto dessas componentes conexas é denotado por $\mathcal{A}$. Ademais, foi mostrado também que o conjunto $\mathcal{A}_0$ definido por

$$\mathcal{A}_0 = \{\lambda \in \mathfrak{h} : 0 < \langle\lambda, \alpha\rangle < 1, \quad \alpha \in \Phi^+\}$$

é também uma alcova, e além disso é chamada de **alcova fundamental**. A figura a seguir ilustra em vermelho a alcova fundamental do sistema de raízes do tipo A_2.

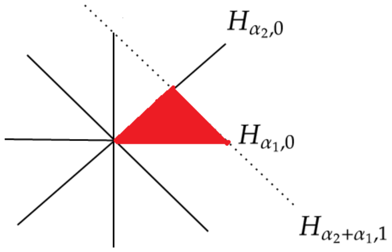

Figura 2: Alcova fundamental de A_2

> **Teorema 0.7.** *W_a age transitivamente no conjunto das alcovas $\mathcal{A}$.*

Finalmente, antes de enunciarmos um dos principais resultados estudados ao decorrer desse projeto, será necessário mais uma rápida definição. Dadas duas alcovas $A, A' \in \mathcal{A}$, diz-se que o hiperplano afim $H_{\alpha,k}$ **separa** A e A' se elas se encontram em diferentes semiespaços determinados por $H_{\alpha,k}$. (No relatório final encontram-se mais detalhes sobre isso).

Agora, utilizando o mesmo conjunto S do teorema 0.6, e denotando por $H_i := H_{\alpha_i,0}$, para $i \in \{1, 2, ..., l\}$ e $H_0 = H_{\alpha_0,1}$, o próximo resultado deixa explícito quem são os hiperplanos que separam $\mathcal{A}_0$ de $w\mathcal{A}_0$, para $1 \neq w \in W_a$.

> **Teorema 0.8.** *Seja $1 \neq w \in W_a$ escrito em uma expressão minimal da forma*
>
> $$w = s_{i_1} s_{i_2} .. s_{i_r} \quad , \text{ onde } s_{i_1}, s_{i_2}, .., s_{i_r} \in S.$$
>
> *Então, os hiperplanos que separam $\mathcal{A}_0$ e $w\mathcal{A}_0$ são*
>
> $$H_{i_1}, s_{i_1} H_{i_2}, s_{i_1} s_{i_2} H_{i_3}, ..., s_{i_1} s_{i_2} ... s_{i_{r-1}} H_{i_r}.$$