XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

SOLUÇÕES FRACAS DE EDP'S APLICADAS A UM MODELO DE PROPAGAÇÃO DE MOSQUITOS

Orientando: Pedro Álvares Muiños
Orientadora: Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Palavras-chave

Equações diferenciais parciais parabólicas, Controle ótimo, Modelo de propagação de mosquitos

Resumo para o XXVIII Congresso {Virtual} de Iniciação Científica da Unicamp

Durante a realização deste projeto, foram estudadas soluções fracas e suas propriedades para um problema de valor inicial e de fronteira envolvendo um operador diferencial parcial parabólico. Além disso, foi estudado um modelo que descreve a propagação de mosquitos, como o *Aedes aegypti*, em uma região.

Na etapa inicial do projeto foi realizado um estudo introdutório sobre teoria da medida. Utilizando o conhecimento adquirido foram estudados alguns espaços de funções e suas propriedades. Dentre eles estão os espaços L^p e L^∞, os espaços de Sobolev e os espaços de funções dependentes do tempo, como por exemplo o espaço $L^p(0,T;X)$, onde X é um espaço de Banach.

Em seguida, usando o ferramental adquirido durante a parte inicial do projeto, foi estudado o seguinte problema de valor inicial e de fronteira.

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & em\ U_T, \\ u = 0 & em\ \partial U \times [0,T], \\ u = g & em\ U \times \{t=0\}, \end{cases} \tag{1}$$

onde U é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$ e $U_T = U \times (0,T]$. Neste problema $f : U_T \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}$ são dadas, $u : \overline{U}_T \to \mathbb{R}$ é a incógnita e L é um operador diferencial

parcial definido da seguinte maneira

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n}\beta^{i}u_{x_i} + \gamma u$$

com os coeficientes $\alpha^{ij} = \alpha^{ij}(x,t)$, $\beta^i = \beta^i(x,t)$ e $\gamma = \gamma(x,t)$. Chamaremos o operador diferencial parcial $\frac{\partial}{\partial t} + L$ de parabólico se este satisfizer a seguinte definição.

Definição 1. *O operador diferencial parcial dado por* $\frac{\partial}{\partial t} + L$ *é dito parabólico se existe constante* C *positiva tal que*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}v_iv_j \geq C|v|^2,$$

para todo $(x,t) \in U_T, v \in \mathbb{R}^n$.

Considerando o Problema (1) com L satisfazendo a Definição 1 e as seguintes hipóteses

$$\begin{aligned} &\alpha^{ij}, \beta^i, \gamma \in L^\infty(U_T), \\ &\alpha^{ij} = \alpha^{ji}, \\ &f \in L^2(U_T), \\ &g \in L^2(U), \end{aligned} \tag{2}$$

foi definido o que é uma solução fraca para o Problema (1) da seguinte maneira.

Definição 2. *Uma função*

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U)), \ \textit{com } \mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U)),$$

é uma solução fraca do Problema (1) se para todo $v \in H_0^1(U)$ *e para quase todo* $0 \leq t \leq T$,

i) $\langle \mathbf{u}'(t), v\rangle + B[\mathbf{u}(t), v; t] = (\mathbf{f}(t), v)$

ii) $\mathbf{u}(0) = g$.

onde B *é a forma bilinear com dependência temporal dada por*

$$B[u,v;t] = \int_U \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha^{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\beta^i(x,t)u_{x_i}v + \gamma(x,t)uv\right)dx,$$

com $u, v \in H_0^1(U)$ *e para quase todo* $0 \leq t \leq T$.

Nesta definição $(\mathbf{f}(t), v) = \int_U \mathbf{f}(t)v dx$ denota o produto interno em $L^2(U)$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa a dualidade entre $H^{-1}(U)$ e $H_0^1(U)$.

Na sequência, utilizando o método de Galerkin, foi encontrado uma solução fraca do Problema (1). Além disso foi demonstrada a unicidade de solução fraca para o problema obtendo dessa maneira o seguinte resultado.

Teorema 1. *Assumindo as hipóteses (2), o Problema (1) admite uma única solução fraca.*

Uma vez demonstradas existência e unicidade da solução fraca para o Prolema (1) foram estudadas propriedades da mesma. Além disso foram demonstrados os princípios de máximo relacionados a operadores parabólicos de segunda ordem. Dentre os resultados obtidos durante esta parte do projeto está o princípio de máximo forte enunciado abaixo.

Teorema 2 (Princípio do Máximo Forte). *Seja $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$, suponha $\gamma \geq 0$ em U_T e que U é conexo. Se*

$$u_t + Lu \leq 0 \text{ em } U_T$$

e u possui máximo não negativo sobre $\overline{U}_T$ em algum ponto $(x^*, t^*) \in U_T$, então u é constante em U_{t^*}. Se

$$u_t + Lu \geq 0 \text{ em } U_T$$

e u possui mínimo não positivo sobre $\overline{U}_T$ em algum ponto $(x^*, t^*) \in U_T$, então u é constante em U_{t^*}.

Na parte final do projeto o foco foi voltado para um modelo que descreve a propagação de mosquitos como, por exemplo, o *Aedes aegypti*, em uma região limitada do espaço. Este modelo é dado por

$$\begin{cases} M_t - \alpha\Delta M + v \cdot \nabla M = \gamma\left(1 - \dfrac{M}{k}\right) M - \mu M - hM1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial M}{\partial \nu} = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0,T), \\ M = M_0, & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é domínio aberto limitado e $0 < T < \infty$. Em (3) $M = M(x,t)$ representa a densidade de mosquitos no ponto x e tempo t, α o coeficiente de difusão, v a velocidade de advecção, γ a taxa de reprodução, k a capacidade de suporte do ambiente, μ a taxa de mortalidade e h uma função de controle que age em um subdomínio ω de Ω.

Para o Problema (3) foi demonstrado que, assumindo certas hipóteses, existe única solução para o mesmo. Assim, usando o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder e resultado de regularidade parabólica foi obtido o seguinte resultado.

Teorema 3. *Seja $Q = \Omega \times (0,T)$. Suponha que $v, \gamma, k, \mu \in L^\infty(Q)$, $h \in L^{\frac{5}{2}}(Q)$, $M_0 \in H^1(\Omega)$ e $\alpha, \gamma, \mu > 0$, $h \geq 0$, $k \geq k_0 > 0$ para algum k_0 constante. Então existe única solução do Problema (3).*

Uma vez obtido o resultado acima foi estudado um problema de controle ótimo associado ao modelo (3). Para isso foram fixados todos os parâmetros e condições de (3) exceto pela função de controle h e definidos o conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$

$$\mathcal{U}_{ad} := \{h \in L^{\frac{5}{2}}(Q); h \geq 0\} \tag{4}$$

e o funcional de custo $J : W_2^{2,1}(Q) \times \mathcal{U}_{ad} \to \mathbb{R}$

$$J(M,h) = \alpha_1 \int_Q |M|^2 dxdt + \alpha_2 \int_Q |h|^{\frac{5}{2}} dxdt \tag{5}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ são constantes dadas e M é a única solução de (3) associada a h dada pelo Teorema 3. Assim, o objetivo é mostrar a existência de um controle ótimo $h_{opt} \in \mathcal{U}_{ad}$ com solução associada M_{opt} satisfazendo

$$J(M_{opt}, h_{opt}) = \min\{J(M,h); h \in \mathcal{U}_{ad}\}.$$

Então foi provado utilizando o método de sequências minimizantes que, sob certas condições, existe $h \in \mathcal{U}_{ad}$ para qual o funcional J atinge o mínimo. Ou seja, foi demonstrado o seguinte resultado.

Teorema 4. *Sejam $v, \gamma, k, \mu \in L^\infty(Q)$, $M_0 \in H^1(\Omega)$ e $\alpha, \gamma, \mu > 0$, $k \geq k_0 > 0$ para algum k_0 constante. Considerando o conjunto admissível $\mathcal{U}_{ad}$ definido em (4) e o funcional de custo J dado por (5), existe controle ótimo $h_{opt} \in \mathcal{U}_{ad}$ com M_{opt} solução associada do problema (3) tal que*

$$J(M_{opt}, h_{opt}) = \min\{J(M,h); h \in \mathcal{U}_{ad}\}.$$

Bibliografia

(i) Bartle, R.G., The elements of integration. John Wiley, New York, NY, 1996.

(ii) Evans, L.C., Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

(iii) Hoffman, K.H., and Jiang, L., Optimal control problem of a phase field model for solidification, Numer. Funct. Anal., 13 (1992), 11-17.