Equação da Onda Unidimensional e n-dimensional e Aplicações

Orientando: João Vitor Camargo Fattori
Orientadora: Profa. Dra. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, UNICAMP

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais hiperbólicas, Equação da onda, Existência e unicidade de solução

As equações diferenciais parciais têm diversas aplicações práticas em diferentes áreas modelando problemas reais. Nesse projeto, o foco é o estudo da equação da onda unidimensional e n-dimensional, as quais nascem de motivações físicas para descrever o comportamento oscilatório de objetos, como por exemplo uma corda vibrante, no caso unidimensional, ou um sólido elástico, no caso tridimensional. O objetivo é estudar aplicações da equação da onda e algumas propriedades de suas soluções, como existência e unicidade.

O projeto teve início com o estudo de sequências e séries de funções, com destaque para a convergência uniforme e para os teoremas de derivação e integração termo a termo. Em especial, as séries de Fourier foram utilizadas para encontrar um candidato à solução da equação da onda unidimensional e, por causa de tal aplicação, foram estudadas condições suficientes para garantir a convergência uniforme da série de Fourier de uma dada função para a própria função.

O estudo da equação da onda se iniciou pelo caso unidimensional, deduzindo a equação para adquirir uma motivação física. Foi estudado o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{para} \quad 0 < x < L \text{ e } t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & \text{para} \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), u_t(x,0) = h(x), & \text{para} \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

o qual modela a vibração de uma corda finita com extremidades fixas. Para estudar a existência de solução para tal problema, o método de separação de variáveis foi aplicado, buscando um candidato para a solução, a saber

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right],$$

com

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \text{ e } b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^L h(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Além disso, a unicidade de tal solução foi obtida pelo método de energia.

Tal estudo, foi empregado para interpretar o problema da corda dedilhada, o qual acontece na acústica com instrumentos musicais como violão e harpa. Outro fenômeno importante investigado é a ressonância, que acontece quando há uma força externa periódica com frequência que coincide com uma frequência natural do sistema.

Em seguida, estudou-se a equação da onda quando definida em toda a reta real em um problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \; u_t(x,0) = h(x), & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

uma idealização da vibração de uma corda muito longa. A existência de uma solução foi analisada obtendo uma fórmula, a chamada fórmula de d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(s)\,ds$$

e, novamente pelo método de energia, obteve-se a unicidade.

A partir de uma análise da fórmula de d'Alembert, algumas propriedades da solução podem ser concluídas, como por exemplo a velocidade de propagação finita. Ademais, como aplicação, foi estudado o problema da linha de transmissão e, pelo método de reflexão, obteve-se resultados para a equação da onda na semi-reta positiva, os quais foram empregados diretamente para resolver a equação da onda em dimensões maiores.

Por fim, foi estudada a equação da onda n-dimensional em um problema com condições iniciais

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u = g, u_t = h & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \end{cases}$$

Do mesmo modo que foi analisada a existência de solução nos casos anteriores, foram explicitadas duas fórmulas, uma para a solução em dimensão ímpar

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} g\,dS\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} h\,dS\right)\right], \end{aligned}$$

onde $\gamma_n = 1.3.5\ldots(n-2)$, obtida através do método de médias esféricas, e outra para a solução em dimensão par

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)}\left(t^{n}\fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)}\left(t^{n}\fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy\right)\right], \end{aligned}$$

onde $\gamma_n = n\,.\,(n-2)\ldots 4\,.\,2$, obtida através do método de descida. Aqui, $B(x,t)$ denota a bola e $\partial B(x,t)$ denota a esfera, ambas com centro em x e raio t. A unicidade foi obtida também pelo método de energia.

Analisando as fórmulas obtidas, para calcular a solução no ponto (x,t) quando n é ímpar, é necessário conhecer as condições iniciais apenas na esfera $\partial B(x,t)$, enquanto que no caso n par, para calcular a solução em (x,t) é necessário conhecer tais funções em toda a bola $B(x,t)$. O que evidencia a diferença de comportamento das soluções em dimensões com paridades distintas, fato conhecido como princípio de Huygens.

Bibliografia

[1] Boyce, W. E.; Di Prima, R. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Ed. LTC, 1994.

[2] Evans, L. Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[3] Farlow, S. J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Editora Dover, 1993.

[4] Figueiredo, D. J. Análise de Fourier e Equações Diferencias Parciais, 4ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[5] Guidorizzi, H. L. Cálculo, Vol. 4, 5ª edição, Ed. LTC, 2004.

[6] Iório, V. EDP Um Curso de Graduação, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.