XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

Estudo de Variantes do Problema do Empacotamento

Rachel Vanucchi Saraiva Rafael C. S. Schouery

06/10/2020

1 Introdução

O Problema do Empacotamento modela o problema logístico de calcular a menor quantidade de recipientes necessários para armazenar um conjunto de itens. Esse problema tem diversas aplicações práticas como, por exemplo, otimizar o uso do espaço de armazenamento para produtos ou arquivos digitais, escalonar tarefas entre diversas máquinas, ou cortar peças a partir de folhas ou rolos de matéria-prima. Na variante bidimensional do problema, considera-se que os itens e os recipientes possuem duas dimensões (altura e largura). Associada a esse problema temos a variante *Strip Packing*, onde os itens são empacotados em uma única faixa de largura fixa e altura infinita, e busca-se minimizar a altura ocupada.

Outra variante do problema conhecida como Min-Sum busca minimizar, em vez da quantidade de recipientes, a função $\sum_{j=1}^{m} j \cdot |B_j|$, onde B_j é o conjunto de itens empacotado no j-ésimo recipiente. Em outras palavras, o custo de empacotar um item em um recipiente é menor nos primeiros recipientes do que nos últimos. Um exemplo de aplicação dessa variante é o escalonamento de tarefas para diversas máquinas buscando minimizar o tempo de execução de todas as tarefas.

Essas variantes são NP-difíceis e portanto não podem ser resolvidas de maneira exata em tempo polinomial, a não ser que $P = NP$. Este estudo foca em algoritmos de aproximação para esses problemas.

2 Algoritmos de Aproximação

Algoritmos de Aproximação são algoritmos de tempo polinomial cujo valor da solução é garantidamente menor ou igual que $\alpha OPT(L)$ para algum $\alpha > 1$, onde $OPT(L)$ é o valor de uma solução ótima para um instância L. A constante α é chamada de *razão de aproximação* do algoritmo, e o algoritmo é chamado de α-aproximação.

Um algoritmo também pode ter razão de aproximação assintótica ρ, ou seja, obter soluções sempre menores ou iguais a $\rho OPT(L) + c$ para alguma constante c. Para casos em que $OPT(L)$ é de ordem de grandeza muito maior que c, o algoritmo é praticamente uma ρ-aproximação.

3 Algoritmos Online

No caso do Problema do Empacotamento, um algoritmo online precisa decidir em qual recipiente colocar cada um dos itens conforme eles chegam sem ter nenhuma informação sobre os próximos itens da instância. A razão entre o valor da solução dada por um algoritmo online e o valor de uma solução ótima offline é chamada *razão de competitividade* do algoritmo, uma definição semelhante à de razão de aproximação.

Algoritmos online *de espaço limitado* mantêm sempre não mais que um número constante de recipientes abertos (capazes de receber novos itens).

Neste estudo concluímos que não existe algoritmo online de espaço limitado com razão de competitividade constante para o problema Min-Sum bidimensional, mesmo no caso particular em que todos os itens são quadrados.

4 Next Fit Decreasing Height

Next Fit Decreasing Height (NFDH) é um algoritmo para *Strip Packing* que ordena os itens em ordem não crescente de altura e então empacota o primeiro item, criando assim o primeiro bloco B_1, com altura H_1 igual à altura de seu primeiro item. A partir disso, para cada item, o algoritmo verifica se esse item cabe no bloco atual. Se sim, o item é colocado nele. Do contrário, é criado um novo bloco acima do atual para colocá-lo. Essa verificação depende apenas da largura do item, já que os itens estão em ordem não crescente de altura, e portanto qualquer item tem altura menor do que os blocos criados antes do empacotamento deste.

O valor da solução do NFDH para uma instância L é $\mathit{NFDH}(L) \leq 2OPT(L) + 1$ [3].

5 First Fit Decreasing Height

First Fit Decreasing Height (FFDH) é outro algoritmo para *Strip Packing*. Assim como o NFDH, ele primeiro ordena os itens em ordem não crescente de altura e então empacota o primeiro item, criando o primeiro bloco B_1. A partir disso, para cada item, o algoritmo verifica se este cabe em algum dos blocos já existentes. Se sim, o item é colocado no primeiro bloco em que cabe. Do contrário, é criado um novo bloco para colocá-lo.

O valor da solução do FFDH para uma instância L é $\mathit{FFDH}(L) \leq \frac{17}{10}OPT(L) + 1$ [3].

6 Hybrid First Fit

Hybrid First Fit (HFF) é um algoritmo para empacotamento bidimensional que combina o FFDH com o First Fit unidimensional. O algoritmo primeiro aplica FFDH para colocar os itens em blocos $B_1, \ldots, B_k$ com alturas $H_1 \geq \cdots \geq H_k$. Como todos os blocos tem a mesma largura, empacotá-los em recipientes é um problema unidimensional, resolvido pelo algoritmo First Fit.

O valor da solução do HFF para uma instância L é $\mathit{HFF}(L) \leq \frac{17}{8}OPT(L) + 5$ [1].

6.1 HFF para Min-Sum bidimensional

Neste estudo concluímos que o algoritmo HFF não possui razão de aproximação constante quando aplicado na variante Min-Sum Bidimensional, podendo obter soluções arbitrariamente ruins para o problema.

7 Next Fit Increasing

Next Fit Increasing (NFI) é um algoritmo para empacotamento unidimensional em que uma lista de itens é ordenada por ordem não-decrescente de tamanho, e então empacotada por Next Fit.

Para qualquer instância L do Problema do Empacotamento Min-Sum, o algortimo Next Fit Increasing devolve uma solução cujo valor é $\mathit{NFI}(I) \leq 2OPT(I)$ [2].

8 Hybrid Next Fit Increasing

Hybrid Next Fit Increasing (HNFI) é um algoritmo para empacotamento bidimensional que ordena os itens em ordem não decrescente de altura e os empacota em blocos $B_1, \ldots, B_p$ de forma semelhante ao NFDH, porém a altura H_j dos blocos é definida pelo último item a ser empacotado neste, em vez do primeiro. Após isso os blocos são empacotados em recipientes por Next Fit.

Para instâncias L do Problema do Empacotamento Min-Sum bidimensional que só contêm itens quadrados de lado menor que $1/4$, o algortimo Next Fit Increasing devolve uma solução cujo valor é $\mathit{HNFI}(I) \leq 2OPT(I)$.

Referências

[1] F. R. K. Chung, M. R. Garey, and D. S. Johnson. On packing two-dimensional bins, 1982.

[2] Leah Epstein, David S. Johnson, and Asaf Levin. Min-sum bin packing. *Journal of Combinatorial Optimization*, 36(2):508–531, Aug 2018.

[3] E. G. Coffman Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan. Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms. *SIAM Journal on Computing*, 9(4):808–826, 1980.