XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Resumo para o Congresso Virtual de Iniciação Científica da Unicamp

Curvatura e Geodésicas

Bolsista: Otávio Cunha Oliveira

Orientador: Professor Doutor Rafael de Freitas Leão

Campinas

2020

Vigência 2019 - 2020

1 Resumo

Tivemos como objetivo do trabalho uma introdução aos conceitos de Geometria Riemanniana como geodésicas e curvatura.

Para trabalhar em Geometria Riemanniana precisamos de uma generalização do conceito de superfícies, as variedades suaves.

Definição 1. *Um espaço topológico M é dito uma n-variedade topológica se é Hausdorff, segundo enumerável e todo ponto em M tem uma vizinhança U que é homeomorfa a um aberto de $\mathbf{R}^n$ por um homeomorfismo φ. O par (U, φ) é chamado de carta em M.*

Precisamos também do conceito de diferenciabilidade em variedades topológicas.

Definição 2. *Um atlas para M é uma coleção de cartas cujos domínios cobrem M. Um atlas para M é dito suave se, para quaisquer cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ em M, $U \cap V = \varnothing$ ou $\psi \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo entre abertos de $\mathbf{R}$. Um atlas suave para M é dito maximal se não está contido em nenhum outro atlas suave estritamente maior que ele. Uma variedade suave é um par de uma variedade topológica e um atlas suave maximal.*

Seja M, N variedades suaves e $F : M \to N$ um mapa qualquer. Dizemos que F é um mapa suave se para todo $p \in M$, existe cartas (U, φ) contendo p e (V, psi) contendo $F(p)$ tal que $F(U) \subset V$ e o mapa $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é suave entre $\varphi(U)$ e $\psi(V)$. O conjunto de todas funções suaves $f : M \to \mathbf{R}$ será denotado por $C^\infty(M)$.

Uma das grandes ferramentas em entender a geometria das variedades é a ideia de aproximação linear, o que leva a definição de espaço tangente.

Definição 3. *Um mapa linear $X : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$ é dito uma derivação em $p \in M$ se $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$. O conjunto de todas derivações em p é um espaço vetorial chamado espaço tangente a M em p, denotado por T_pM.*

O espaço tangente dual T_p^*M será chamado de espaço cotangente.

Se $F : M \to N$ é um mapa suave entre variedades suaves, para cada $p \in M$ definimos um mapa linear $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$, chamado de pushforward associado a F, por

$$(F_*X)(f) = X(f \circ F)$$

Uma das construções mais importantes é a de fibrado vetorial, pois permite astender algo definido pontualmente para algo global em uma variedade.

Definição 4. *Seja M um variedade topológica. Um fibrado vetorial suave de posto k sobre M é uma variedade topológica E junto com uma função suave $\pi : E \to M$ que, para cada $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ está endossado com uma estrutura de um espaço vetorial real k-dimensional e, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$ tal que $\pi_1 \circ \Phi = \pi$ ($\pi_1 : U \times \mathbf{R}^k \to U$ é a projeção na* *primeira coordenada) e tal que, para todo $q \in U$ a restrição de Φ a E_q seja um isomorfismo de espaços vetoriais de E_q em $\{q\} \times \mathbf{R}^k$.*

Um importante caso de fibrado vetorial é o fibrado tangente $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M}\{p\} \times T_pM$ junto com o mapa $\pi : TM \to M$, $\pi(p, X) = p$. Um campo vetorial é uma seção do fibrado tangente, isto é, um mapa contínuo $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$. O conjunto de campos vetoriais será denotado por $\mathcal{T}(M)$.

Dados $f \in C^\infty(M)$ e $V \in \mathcal{T}(M)$, podemos definir $Vf \in \mathcal{T}(M)$ por $Vf(p) = V_pf$. Dados $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, definimos $[X, Y] \in \mathcal{T}(M)$ por $[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf)\ \forall p \in M, f \in C^\infty(M)$.

Definição 5. *Um k-tensor covariante em um espaço vetorial V é uma função multilinear $T : V \times ... \times V \to \mathbf{R}$ em k elementos de V. O conjunto de todos k-tensores em V será denotado por $T^k(V)$.*

Dada uma variedade suave M, definimos o fibrado de k-tensores covariantes em M por $T^kM = \bigsqcup_{p \in M} T^k(T_pM)$ com $\pi : T^kM \to M$, $\pi(p, T) = p$. Um k-campo tensorial covariante suave é uma seção suave de T^kM, isto é, um mapa $\sigma : M \to T^kM$ suave tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$.

Dado uma mapa suave $F : M \to N$ entre variedades suaves e um k-campo tensorial covariante suave σ em N, definimos k-campo tensorial covariante suave $F^*\sigma$ em M, chamado de pullback de σ por F, por, se $X_1, .., X_k \in T_pM$,

$$(F^*\sigma)_p(X_1, ..., X_k) = \sigma_{F(p)}(F_*X_1, ..., F_*X_k)$$

Para entendermos propriedades geométricas em variedades, precisamos definir o que é métrica Riemanniana, objeto principal da Geometria Riemanniana.

Definição 6. *Uma métrica Riemanniana g em uma variedade suave é um 2-campo tensorial covariante simétrico, $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)\ \forall p \in M, \forall X, Y \in T_pM$, e positivo definido, $g_p(X, X) > 0\ \forall p \in M, \forall X \in T_pM$. O par (M, g) é chamado de variedade Riemanniana.*

Usamos a métrica Riemanniana para definir norma de vetores tangentes: $|X| = g_p(X, X)^{\frac{1}{2}}$ $\forall X \in T_pM$. E com isso podemos definir também o comprimento de uma curva suave $\gamma : [a, b] \to M$ como

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Assim podemos também definir distância em uma uma variedade Riemanniana.

Definição 7. *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana conexa e $p, q \in M$, a distância entre p e q, denotada por $d_g(p, q)$, é o ínfimo de $L(\gamma)$ sobre toda curva suave por partes γ de p a q.*

Um difeomorfismo $F : (M, g) \to (N, \tilde{g})$ entre variedade Riemannianas é dito isometria se $F^*\tilde{g} = g$. Isso é equivalente a $d_{\tilde{g}}(F(p), F(q)) = d_g(p, q)\ \forall p, q \in M$ se M e N são conexas.

Vimos nesse trabalho o conceito de conexão linear, que é um conceito mais geral de como derivar campos vetoriais.

Definição 8. *Uma conexão linear é um mapa* $\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$, $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, $C^\infty(M)$*-linear em* X, $\mathbb{R}$*-linear em* Y *e* $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \forall f \in C^\infty(M)$ *e* $\forall Y \in \mathcal{T}(M)$.

Um campo vetorial sobre uma curva $\gamma : I \to M$ *é um mapa* $V : I \to TM$ *tal que* $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. *Para toda curva* $\gamma : I \to M$, *uma conexão linear determina um operador entre campos vetoriais sobre essa curva, denotado por* D_t *tal que* $D_t V(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}$, *em que* $\tilde{V}$ *seja uma extensão de* V, *isto é,* $V \in \mathcal{T}(M)$ *e* $\tilde{V}_{\gamma(t)} = V(t)$.

Uma conexão ∇ *numa variedade Riemanniana é dita compatível com a métrica* g *se* $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Y Z\rangle$.

Um importante lema de Geometria Riemanniana é o de existência de uma conexão compativel com a métrica.

Teorema 1. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão linear* ∇ *em* M *que é compatível com* g *e simétrica:* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \; \forall X, Y \in \mathcal{T}(M)$. *Esta conexão é chamada de conexão Levi-Civita.*

Agora podemos entender os conceitos de geodésicas e curvatura Gaussiana.

Definição 9. *Uma curva* $\gamma : I \to M$ *em uma variedade Riemanniana com uma conexão* ∇, *entã* γ *é dita uma geodésica se* $D_t\gamma' \equiv 0$. *Se* ∇ *for a conexão Levi-Civita, dizemos que* γ *é uma geodésica Riemanniana.*

Um dos grandes problemas de Geometria Riemanniana é encontrar uma curva que seja "o menor caminho entre dois pontos". Vamos ver que esse problema está intimamente com o conceito de geodésicas.

Definição 10. *Uma curva* $\gamma : [a,b] \to M$ *em* M *variedade Riemanniana com* $\gamma(a) = p$ *e* $\gamma(b) = q$ *é dita minimizante se* $L(\gamma) = d_g(p,q)$.

Teorema 2. *Toda curva minimizante é uma geodésica quando dada a parametrização com velocidade escalar unitária.*

Um dos conceitos mais importante para entendermos a forma de variedades Riemannianas e a relação de sua geometria com sua topologia é o conceito de curvatura Gaussiana.

No trabalho vimos como definir e entender o chamado operador forma que é essencial para definirmos a curvatura Gaussiana.

Teorema 3. *Dada uma hipefície* M *em* $\mathbb{R}^n$, *isto é, uma subvariedade imersa de* $\mathbb{R}^n$ *com a metrica induzida de* $\mathbb{R}^n$, *se* N *é uma campo vetorial normal a* M, *então o operador forma* s *é dado por, para* $X \in \mathcal{T}$

$$s(X) = -\overline{\nabla}_X N$$

em que $\overline{\nabla}$ é a conexão Euclideana em $\mathbb{R}^n$ dada por $\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X (Y^i \partial_i) = (XY^i)\partial_i$. Além disso, em cada ponto $p \in M$, s é um operador linear auto-adjunto em T_pM, portanto, por Álgebra Linear, é diagonalizável.

Definição 11. *As funções $\kappa_1, ..., \kappa_n$ que associam em cada $p \in M$ os autovalores do operador forma são chamadas curvaturas principais de M.*

A função curvatura Gaussiana K de M é definida por $K(p) = \det s_p$. Portanto, $K = \kappa_1 ... \kappa_n$. A curvatura Gaussiana mostrou-se importantíssima no estudo da geometria de hiperfícies no espaço Euclideano e também importante no entendimento da relação entre geometria e topologia.

Existem dois grandes teoremas clássicos relacionados a curvatura Gaussiana que estudamos no trabalho.

Teorema 4. *(Teorema Egregium de Gauss) A curvatura Gaussiana é um invariante isométrico.*

Teorema 5. *(Teorema de Gauss-Bonnet) Se M é uma 2-variedade Riemanniana triangulada, compacta, orientada, então*

$$\int_M K \, dA = 2\pi\chi(M)$$

em que $\chi(M)$ é a característica de Euler de M, um invariante topológico estudado em topologia algébrica.

Referências

[1] LEE, John M. Riemannian manifolds: an introduction to curvature. New York, NY: Springer, c1997. 224 p., il. (Graduate texts in mathematics, 176). ISBN 0387983228 (broch.).

[2] LEE, John M. Introduction to smooth manifolds. New York, NY: Springer, c2003. 628 p., il. (Graduate texts in mathematics, 218). ISBN 9780387954486 (broch.).