ESTUDOS SOBRE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO INTEGRADOS NO PROCESSO PRODUTIVO DE INDÚSTRIAS DE MANUFATURA

Leandro Yugo Tagawa Wada
leandroyugo@gmail.com

Carla T. L. S. Ghidini
cghidini@unicamp.br

RESUMO

Neste projeto, com o objetivo principal de ampliar o conhecimento na área de Pesquisa Operacional, foram estudados vários modelos matemáticos de otimização linear inteira que representam os problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque presentes no processo produtivo de diversos tipos de indústrias de manufatura, com um destaque maior para a indústria moveleira. Além disso, diferentes métodos de solução, propostos na literatura, para este tipo de problema integrado também foram estudados e alguns deles implementados com o auxílio dos *softwares* CPLEX IDE 12.8.0 e Visual Studio 2019. Experimentos computacionais foram realizados com classes de instâncias geradas aleatoriamente com base em dados da literatura e os resultados obtidos foram analisados e comparados.

PALAVRAS-CHAVE: Problema de Dimensionamento de Lotes, Problema de Corte de Estoque, Problema Integrado, Programação Linear Inteira.

1. Introdução

Visando a eliminação dos desperdícios de matéria prima e reduzir os custos de produção e estoques, o processo produtivo de várias indústrias de manufatura pode ser otimizado resolvendo os problemas de dimensionamento de lote e de corte de estoque presentes nele.

O problema de dimensionamento de lote (PDL) consiste no planejamento e na programação de quais e quantos produtos finais devem ser produzidos em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de forma a atender uma certa demanda, considerando limitações de capacidade de produção e visando otimizar uma função objetivo, que geralmente consiste na minimização de custos (Araujo e Arenales, 2000).

O problema de corte de estoque (PCE), que é comum em indústrias de manufatura, tais como, papeleira, metalúrgicas, moveleiras etc., consiste em cortar objetos (peças grandes) de tamanhos padronizados em itens (peças menores) demandados, de tamanhos variados com o objetivo de minimizar a perda de material e/ou o número de objetos cortados (Arenales et al, 2006).

Já o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, ou só problema é a junção desses dois problemas. Neste tipo de problema são analisadas as oportunidades de adiantar a produção de determinado item (redimensionar os lotes) para que no corte destes itens reduza o máximo possível a quantidade de material utilizado e também diminua a perda de material. Ao fazer isso, gera-se um custo de estoque, já que esses itens são produzidos em um período anterior ao necessário. Portanto, esse adiantamento de lotes só é vantajoso quando a redução do custo de material é maior que o aumento do custo com estoque.

O restante do texto está organizado da seguinte forma: na Seção 2 é feita a descrição do problema integrado na indústria de móveis, objeto de estudo deste trabalho e apresentada uma modelagem matemática do mesmo. Na Seção 3, está descrito o método de resolução proposto na literatura para resolver o modelo matemático do problema integrado e na Seção 4 estão descritos os experimentos computacionais realizados e os resultados obtidos. Na Seção 5, estão as conclusões e a última seção traz as referências bibliográficas.

2. Definição e Modelagem Matemática do Problema

Em particular, os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque estão presentes no processo produtivo da indústria de móveis, onde são definidos como serão cortadas as placas de madeira (matéria-prima) e quais e quantos lotes de móveis serão confeccionados em cada período do horizonte de planejamento. Nesse tipo de indústria, primeiramente é resolvido um PDL e, apenas após a definição dos lotes, é que o PCE é resolvido para definir os padrões de corte (maneira como os objetos são cortados) que serão utilizados nas placas estocadas para produzir as peças que compõem os produtos demandados. Entretanto, a resolução destes dois problemas de forma separada pode gerar soluções ruins, com custos totais elevados devido ao aumento do desperdício de material. Isto costuma ocorrer quando uma parcela significante do custo do produto final é referente à matéria-prima (Ghidini, 2008). Por esse motivo os problemas de dimensionamento de lote e corte de estoque devem ser analisados, tratados e resolvidos simultaneamente.

O processo produtivo da indústria de móveis envolve diversas etapas e tipos de equipamentos. De maneira simplificada, podemos dividi-lo em cinco etapas, que são: corte, furação, montagem, pintura/acabamento e embalagem/estocagem. Para representar este processo e otimizá-lo foi proposto em Ghidini (2008) um modelo matemático de otimização linear inteira, o qual integra o PDL com o PCE através de um conjunto de restrições. Nele, são consideradas máquinas (serra e furadeira) com capacidades limitadas (que são os possíveis gargalos do processo produtivo) e uma certa demanda esperada dos produtos finais, formada pela carteira de pedidos mais uma demanda extra de segurança, a qual é definida pelo setor de vendas da empresa e representada por variáveis de decisão, de forma que o modelo determinará o melhor momento para produzi-la. Por conta da incerteza da demanda, é também utilizada a técnica de horizonte de planejamento rolante. Esta técnica consiste em dividir o primeiro período do horizonte de planejamento em subperíodos e somente as decisões referentes ao primeiro período são bem definidas, nos demais períodos, elas são agregadas.

A seguir são apresentados os parâmetros, as variáveis e o modelo matemático proposto para representar o problema integrado na indústria de móveis. Para mais detalhes veja Ghidini (2008).

- **Índices**

$t = 1, \dots, T$: período do horizonte de planejamento.
$e = 1, \dots, S$: tipo de espessura para a placa LxW.
$j = 1, \dots, N^e$: padrão de corte para a placa de espessura e.
$i = 1, \dots, M$: tipo de produto.
$\tau = 1, \dots, \theta$: subperíodo do primeiro período.
$p = 1, \dots, P^e$: tipo de peça de espessura e que compõe os produtos.

- **Parâmetros**

T: número de períodos do horizonte de planejamento.
S: número de tipos de espessuras para a placa de dimensões LxW.
N^e: número de diferentes padrões de corte para a placa de espessura e.
M: número de tipos de produtos.
θ: número de subperíodos em que o período 1 é subdividido.
P^e: número de tipos de peças de espessura e.
P: número total de tipos de peças, nas S espessuras, que compõem os produtos, ou seja, $P = P^1 + \dots + P^S$.
c_{it}: custo de manufaturar o produto tipo i no período t.
cp^e: custo por unidade da placa de espessura e.
h_{it}: custo de estoque por unidade do produto tipo i no final do período t, para atender à demanda em carteira.
f_{it}: custo de estoque por unidade do produto tipo i no final do período t para atender à demanda em carteira.
d_{it}: demanda em carteira do produto tipo i no período t.
r^e_{pi}: quantidade de peças do tipo p e espessura e requerida por unidade do produto tipo i.
tc_i: tempo gasto para cortar todas as peças que compõem uma unidade do produto tipo i.
tf_i: tempo gasto para furar todas as peças que compõem uma unidade do produto tipo i.
v^e_j: tempo gasto para cortar uma placa de espessura e conforme o padrão de corte j.

b^e_p: tempo gasto para furar uma peça do tipo p e espessura e.
cs^e_{jt}: custo de preparação da serra para cortar uma placa de espessura e conforme o padrão de corte j no subperíodo τ.
$capS_\tau$: disponibilidade da serra (em horas) no subperíodo τ.
$CapS_t$: disponibilidade da serra (em horas) no período t.
$capF_\tau$: disponibilidade da furadeira (em horas) no subperíodo τ.
$CapF_t$: disponibilidade da furadeira (em horas) no período t.
$a^e_{pj\tau}$: quantidade de peças do tipo p no padrão de corte j para a placa de espessura e no subperíodo τ.
D_i: demanda esperada do produto tipo i no horizonte de planejamento.
Q: quantidade máxima de peças que podem ser cortadas no período 1.

- **Variáveis de decisão**

x_{it}: quantidade do produto tipo i a ser manufaturada no período t.
E_{it}: parcela da demanda extra do produto tipo i manufaturada no período t.
I_{it}: quantidade do produto tipo i estocada no final do período t para atender à demanda em carteira.
$y^e_{j\tau}$: quantidade de placas de espessura e cortada conforme o padrão de corte j no subperíodo τ.
$z^e_{j\tau}$: variável binária de preparação (indica a utilização ou não da serra para cortar a placa de espessura e conforme o padrão de corte j no subperíodo τ, ou seja, $z^e_{j\tau} = 1$ se $y^e_{j\tau} > 0$ ou $z^e_{j\tau} = 0$ caso contrário).

Modelo Matemático

$$Min\ \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}(c_{it}x_{it} + h_{it}I_{it} + f_{it}E_{it}) + \sum_{\tau=1}^{\theta}\sum_{e=1}^{S}\sum_{j=1}^{N^e}(cp^e y^e_{j\tau} + cs^e_{j\tau}z^e_j). \qquad (1)$$

$$s.a.\quad x_{it} + I_{i(t-1)} - I_{it} = d_{it} + E_{it}, \qquad i = 1,\dots,M,\ \ t = 1,\dots,T \qquad (2)$$

$$\sum_{t=1}^{T}(d_{it} + E_{it}) = D_i, \qquad i = 1,\dots,M \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{M} tc_1 x_{it} \le CapS_t, \qquad i = 1,\dots,T \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{M} tf_1 x_{it} \le CapF_t, \qquad i = 1,\dots,T \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{N^e}\sum_{\tau=1}^{\theta} a^e_{pj\tau}y^e_{j\tau} = \sum_{i=1}^{M} r^e_{pi}x_{i_1}, \qquad p = 1\dots,P^e,\ \ e = 1,\dots,S \qquad (6)$$

$$\sum_{e=1}^{S}\sum_{j=1}^{N^e} v^e_j y^e_{j\tau} \le capS_\tau, \qquad \tau = 1,\dots,\theta \qquad (7)$$

$$\sum_{e=1}^{S}\sum_{j=1}^{N^e}\sum_{p=1}^{P^e} b^e_p a^e_{pj\tau}y^e_{j\tau} \le capF_\tau, \qquad \tau = 1,\dots,\theta \qquad (8)$$

$$y^e_{j\tau} \le Qz^e_{j\tau}, \qquad j = 1,\dots,N^e, \qquad e = 1,\dots,S, \qquad \tau = 1,\dots,\theta \qquad (9)$$

$$x_{it}, I_{it}, E_{it} \ge 0 \text{ e inteiros}, \qquad i = 1,\dots,M,\ \ t = 1,\dots,\theta \qquad (10)$$

$$y^e_{j\tau} \ge 0 \text{ e inteiros}, \qquad j = 1,\dots,N^e, \qquad e = 1,\dots,S, \qquad \tau = 1,\dots,\theta \qquad (11)$$

$$z^e_{j\tau} \in \{0,1\}, \qquad j = 1,\dots,N^e, \qquad e = 1,\dots,S, \qquad \tau = 1,\dots,\theta \qquad (12)$$

A função objetivo (1) minimiza os custos totais do processo produtivo, que é composto pelo custo de produção e estoque dos produtos, das placas cortadas e preparação de máquinas. A restrição (2), junto da restrição de não negatividade (10), garante que as demandas dos produtos serão atendidas em todos os períodos. A restrição (3) se refere a demanda esperada e assegura que a demanda de todos os períodos seja igual a soma das demandas em carteira com as demandas extras. As restrições (4) e (5) são de capacidade da serra e furadeira, respectivamente para os períodos. Elas evitam que uma quantidade muito grande de produtos seja planejada para ser produzida a partir do segundo período. Enquanto estas restrições dizem respeito aos períodos, as restrições (7) e (8) são de capacidade da serra e da furadeira para os subperíodos, garantindo que o tempo total disponível para cada um destes equipamentos não seja excedido em nenhum subperíodo. A restrição (6) tem duas utilidades. A primeira é garantir que a demanda das peças do primeiro período seja satisfeita. A segunda é integrar o PDL com o PCE, ao impor que a quantidade de peças de todos os tipos e espessuras cortadas em todos os subperíodos do primeiro período seja igual à quantidade de peças de todos os tipos e espessuras necessárias para compor todos os produtos que serão manufaturados no primeiro período. A restrição (9) é de preparação de máquina. Ela indica quando uma placa de espessura é cortada de acordo com um padrão de corte num dado subperíodo. As restrições (10) e (11) são de não negatividade e integralidade das variáveis, enquanto a (12) define $z^e_{j\tau}$ como variável binária.

O modelo matemático (1)-(10) é difícil de resolver devido à integralidade das variáveis, a grande quantidade de padrões de corte bidimensionais que podem ser considerados e por possuir variáveis binárias de preparação no corte.

3. Métodos de Solução

Por ser do tipo NP-difícil, para a resolução do modelo matemático que representa o problema integrado na indústria de móveis, em Ghidini (2008), foi proposta uma abordagem heurística baseada no método simplex com geração de colunas, uma vez que a integralidade das variáveis de decisão foram relaxadas e uma heurística residual também foi usada para obter uma solução inteira.

3.1 Heurística de acoplamento

A heurística de acoplamento consiste em aplicar o método simplex com geração de colunas para resolver o modelo matemático (1)-(12) com todas as variáveis relaxadas e sem as variáveis de preparação. A cada iteração da heurística, um problema mestre restrito, que contém um número reduzido de padrões de corte e alguns subproblemas de corte bidimensional são resolvidos. Os subproblemas irão gerar novos padrões de corte bidimensional, sem a limitação do número de itens, os quais farão parte das novas colunas candidatas a serem inseridas no problema mestre. Resolvendo o problema mestre, o vetor multiplicador simplex é obtido e irá compor a função objetivo do PCE bidimensional para determinar um novo padrão de corte.

3.2. Geração de padrões de corte bidimensionais (Gilmore e Gomory, 1965)

Para gerar padrões de corte bidimensional guilhotinado 2-estágios exato, Gilmore e Gomory (1965) propuseram uma técnica que consiste, basicamente, na realização de dois passos conforme descrito a seguir.

Seja uma placa retangular com dimensões $L\text{x}W$, a qual deve ser cortada para gerar *m* tipos de itens menores. Para cada item tipo *i*, com dimensões $l_i\text{x}w_i$, está associado um valor de utilidade v_i, *i* = 1, ..., *m*.

Passo 1. Definir as melhores faixas para compor o padrão

Para compor o melhor padrão de corte para a placa $L\text{x}W'$, é necessário resolver vários problemas da mochila, onde devemos considerar para uma faixa $L\text{x}w_u$, o conjunto dos itens que podem ser cortados como $W_u = \{i | w_i = w_u\}$. As faixas são definidas somente para larguras diferentes, se $w_1 = w_2$, apenas $L\text{x}w_1$ é considerada. Supondo que existam *r* larguras diferentes, então são consideradas as seguintes *r* faixas: $L\text{x}w_1, L\text{x}w_2, \dots, L\text{x}w_r$

Para a faixa $L\text{x}w_u$, onde *u* = 1, ..., *r*, deve-se resolver o seguinte problema da mochila:

$$\begin{aligned} V_u &= Max \textstyle\sum_{i \epsilon W_u} v_i \gamma_{iu} \\ s.a. \quad & \textstyle\sum_{i \epsilon W_u} l_i \gamma_{in} \leq L, \\ & \gamma_{iu} \geq 0 \text{ e inteiros, } i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{13}$$

onde, γ_{iu} é o número de itens do tipo *i* na faixa Lxw_u.

Passo 2. Determinar quantas vezes cada faixa será utilizada no padrão

Para determinar quantas vezes cada faixa será utilizada no padrão de corte, é necessário resolver um outro problema da mochila, sendo considerado as larguras w_u de cada faixa *u*, para *u* = 1, ..., *r* e a largura *W* da placa, cujo modelo matemático é o seguinte:

$$\begin{aligned} V &= Max \textstyle\sum_{u=1}^{r} V_u \beta_u \\ s.a. \quad & \textstyle\sum_{u=1}^{r} w_u \beta_u \leq W, \\ & \beta_u \geq 0, \quad u = 1, \dots, r, \end{aligned} \tag{14}$$

onde, β_u é o número de faixas do tipo *u* no padrão de corte.

Assim, o vetor associado ao padrão de corte bidimensional 2-estágios exato obtido fica da seguinte forma:

$$a = \begin{pmatrix} \propto_1 = \sum_{u=1}^{r} \beta_u \gamma_{tu} \\ \vdots \\ \propto_m = \sum_{u=1}^{r} \beta_u \gamma_{mu} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Esta técnica proposta por Gilmore e Gomory foi implementada e utilizada para gerar os padrões de corte bidimensionais nos problemas testes resolvidos nos experimentos computacionais.

4. Experimentos Computacionais

A implementação das heurísticas de acoplamento e residual e da técnica para gerar os padrões de corte bidimensionais foi feita em linguagem de programação C na plataforma Windows. O computador utilizado foi um notebook Dell Inspiron, com processador i7 e memória de 8GB e os *softwares* foram CPLEX IDE 12.8.0 e Visual Studio 2019.

Os primeiros testes computacionais foram realizados com o intuito de validar a implementação da heurística de acoplamento e, também, analisar os resultados obtidos para verificar o comportamento do modelo diante de situações diferentes. Para isso, foram geradas aleatoriamente 36 classes de problemas, contendo 5 exemplares em cada uma delas, variando os parâmetros: demanda, custo de estoque e custo da variável de oportunidade. Os valores apresentados são a média aritmética obtida em cada classe.

Foi observado nesses primeiros testes que ao variar o tamanho das demandas, a maior diferença no tempo total de resolução foi de 42,35% e com relação ao número total de iterações médio a maior diferença foi de 21,74%. Porém, de um modo geral, o tempo total de resolução e o número total de iterações médio são menores para as classes com demanda baixa e mais altos para a demanda alta, exceto em 3 classes de demanda média, onde o número total de iterações médio foi o menor obtido.

Após isso, foi feito outro teste, resolvendo as mesmas 36 classes de problemas, porém, agora com todas as variáveis inteiras e, portanto, a heurística residual foi considerada. Ao comparar os resultados do problema relaxado com os resultados das soluções inteiras, foi observado que o tempo total de resolução até obter a solução inteira chegou a ser, no pior caso, 1459% maior que o tempo usado para determinar a solução ótima do problema do problema relaxado e no melhor caso o tempo foi 950,5% maior, que equivale a uma diferença de 231,03 e 83,842 segundos, respectivamente. Isso aconteceu pelo fato de que a heurística residual resolve o problema residual várias vezes, sendo um a cada iteração. Considerando o valor total da função objetivo, observou-se que os valores inteiros foram também maiores, com uma diferença de 49,22% no pior caso e uma diferença de 47,54% no melhor caso, equivalendo à uma diferença de R$ 21.237,31 e R$ 29.264,152, respectivamente. Já com relação a perda média, os valores da solução inteira obtidos são maiores em comparação a solução relaxada, com uma diferença de 84,27% no pior caso e uma diferença de 85,71% no melhor caso, o que equivale a uma diferença de 0,028% e 0,02%, respectivamente. Finalmente, comparando o número médio de placas usadas, no pior caso a diferença foi de 24,98% e no melhor caso de 23,59%, o que equivale a 1357,33 e 90,32 placas, respectivamente. Vale ainda ressaltar que os valores da solução inteira são sempre maiores que os valores da solução relaxada, como já era esperado, pois a solução relaxada é um limitante inferior para a solução inteira.

5. Conclusões

O presente projeto foi importante para aumentar o conhecimento em otimização linear inteira, compreender em detalhes como é o processo produtivo de alguns tipos de indústrias de manufatura, desenvolver as habilidades para modelar matematicamente problemas de otimização integrados ou não e também para implementar algoritmos de métodos de resolução específicos para esse tipo de problema, em linguagem C, com o auxílio do pacote de otimização do *software* CPLEX e do ambiente de desenvolvimento do Visual Studio 2019. Além disso, neste projeto, foi possível aprimorar as habilidades em realizar experimentos computacionais, analisar e comparar os resultados obtidos nos testes e escrever textos científicos.

Referências Bibliográficas

[1] Araujo, S. e Arenales, M., *Problema de dimensionamento de lotes monoestágio com restrição de capacidade: modelagem, método de resolução e resultados computacionais*. Pesquisa Operacional, v. 20, n.2 (2000).

[2] Arenales, M.; Armentano, V.; Morabito, R.; Yanasse, H., "*Pesquisa Operacional*". Editora Campus (2006).

[3] Ghidini, C. T. L., "*Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque*". Tese de doutorado. ICMC – USP (2008).

[4] Gilmore, P. C.; Gomory, R. E., *"Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions"*. Operations Research, 13: 94-120 (1965).