XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

Distribuições Planares de Matéria na Relatividade Geral

Pedro Lucas Tomaz Neves
Ricardo Antonio Mosna

1 Introdução

Neste projeto, foram estudadas duas métricas que podem ser consideradas versões relativísticas de uma distribuição de massa no plano infinito Newtoniano. Suas principais características foram analisadas e comparadas com as da versão clássica, e assim foi possível enxergar algumas das semelhanças e divergêcias existentes entre os dois modelos. O projeto, fornecendo uma generalização relativística de um modelo clássico bastante conhecido, serviu como uma introdução a tópicos avançados da Teoria Geral da Relatividade. O texto que no qual o projeto foi baseado é o artigo "The general relativistic infinite plane". Este texto forneceu a maior parte do embasamento teórico e físico relevante para o projeto.

2 Desenvolvimento

Na mecânica Newtoniana, um campo gravitacional uniforme é produzido por um plano infinito com densidade de massa constante, cujo potencial gravitacional é dado por

$$\vec{g} = -\nabla\phi = -2\pi G[\Theta(z) - \Theta(-z)]\hat{z} \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\sigma\delta(z), \tag{1}$$

onde $\Theta(z)$ é a função degrau de Heaviside, e $\delta(z)$ é a Delta de Dirac. Das equacões acima, inferimos que $\phi = 2\pi G\sigma|z|$. Um dos pré-requisitos básicos para que uma determinada solução possa servir como análoga relativística para um plano infinito é o de que a sua distrbuição de matéria seja proporcional a $\delta(z)$, ou seja, $\rho(z) \propto \delta(z)$. Neste, projeto, foram esudadas duas soluções para o problema; a primeira é uma versão 4D dos modelos 5D de brana(brane world), enquanto a segunda é a solução de parede de domínio(domain wall).

A primeira métrica sugerida é

$$ds^2 = e^{2g|z|}(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + dz^2 \tag{2}$$

O Tensor de Einstein dessa métrica é

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3g^2e^{2g|z|} - 2g\delta(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3g^2e^{2g|z|} + 2g\delta(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3g^2e^{2g|z|} + 2g\delta(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3g^2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Desta forma, podemos agora ver a proporcionalidade(a menos de uma constante) entre T_{00} e $\delta(z)$. Através da inserção de uma constante cosmológica:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - 8\pi G\lambda g_{\mu\nu}, \qquad \text{com } \lambda = \frac{-3g^2}{8\pi G}, \tag{4}$$

obtemos:

$$T_{00} = -\frac{g}{4\pi G}\delta(z), \qquad T_{xx} = T_{yy} = \frac{g}{4\pi G}\delta(z). \tag{5}$$

Note, no entanto, que diferentemente do caso Newtoniano, temos $T_{xx}, T_{yy} \neq 0$. Portanto, existem pressões nas direções x e y, além de uma constante cosmológica.

A segunda métrica proposta pelo artigo, que também serve como solução para o problema em questão, é

$$ds^2 = (1 - 2g|z|)^{-\frac{1}{2}}(-dt^2 + dz^2) + (1 - 2g|z|)(dx^2 + dy^2). \tag{6}$$

Para tal métrica, as componentes do Tensor de Einstein são:

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 2g\delta(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}g\delta(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}g\delta(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Observamos que neste caso não é necessária a introdução de uma constante cosmológica para que tenhamos $T_{00} \propto \delta(z)$. De fato, as componentes do tensor energia-momento são:

$$T_{00} = \frac{g}{4\pi G}\delta(z), \qquad T_{xx} = T_{yy} = -\frac{g}{16\pi G}\delta(z). \tag{8}$$

Porém, ao calcularmos o escalar de Kretschmann $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ para esta métrica, podemos concluir que a solução possui uma singularidade em $z = \pm\frac{1}{2g}$. A solução anteriormente proposta, no entanto, não possui singularidade, e tal característica conta a seu favor.

Em seguida, o artigo explora as trajetórias geodésicas para partículas em ambas as soluções propostas, restringindo-se a $z \geq 0$. Começamos pela métrica do mundo brana, para a qual obtemos a seguinte equacão da geodésica:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -ge^{-2gz} + ge^{2gz}\eta ij \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}, \tag{9}$$

onde $\eta_{ij} = 1$ se $i = j = 1$ ou $i = j = 2$, e zero em outro caso. Ao observarmos a equação (1) para o plano Newtoniano, podemos notar que a aceleração gerada pelo plano é constante. Da equação (9), fica claro que o mesmo não é válido para a métrica do mundo brana. Porém, a aceleração descoberta acima é calculada em relação ao tempo próprio da partícula que se move na geodésica. Para que seja feita uma comparação mais direta entre o caso Newtoniano e o relativístico, vamos estudar a aceleração medidia com um sistema de relógios fixos em relação ao plano infinito, em $z = 0$, Podemos relacionar o tempo medido pelos dois observadores através de $d\tau = \sqrt{-g_{00}}dT = \sqrt{e^{2gz}}dT$. Com isso, a equação da geodésica assume a seguinte forma:

$$\frac{d^2 z}{dT^2} = -g + g\left[\left(\frac{dz}{dT}\right)^2 + e^{2gz}\left(\left(\frac{dx}{dT}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dT}\right)^2\right)\right] \tag{10}$$

Analisando a equação (1), observamos que a aceleração gerada pelo plano é constante. Na equação (10), é possível enxergar o fator responsável pela aceleração constante obtida no caso Newtoniano. Porém, há outros termos que não estão presentes no modelo clássico, e tais termos são dependentes da velocidade da partícula em todas as direções. Perceba também que quanto mais distante a partícula está do plano, maior é sua aceleração.

Para a outra métrica considerada, depois de realizarmos algumas aproximações obtemos a seguinte equação da geodésica:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}eg - \frac{g}{2(1-2gz)}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 - g(1-2gz)^{\frac{1}{2}}\eta_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}. \tag{11}$$

Observe que esta métrica produz uma aceleração uniforme em direção ao plano, mas que assim como no caso da métrica anterior, há termos dependentes das velocidades da partícula. Utilizando o raciocínio previamente aplicado, isto é, mudando para o referencial de um observador em $z = 0$ e sincronizando os relógios de acordo com tal mudança, temos que $d\tau = \sqrt{-g_{00}}dT = (1-2gz)^{-\frac{1}{4}}dT$, e:

$$\frac{d^2 z}{dT^2} = -\frac{1}{2}eg(1-2gz)^{-\frac{1}{2}} - g(1-2gz)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{dx}{dT}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dT}\right)^2\right). \tag{12}$$

Comparando (10) com (12), percebemos que ambas acelerações são dependentes da velocidade da partícula e de sua distâcia ao plano. No entanto, ao contrário da primeira métrica, a segunda não porduz aceleração local constante, e nisso, contrasta com o plano Newtoniano. De fato, a aceleração produzida diverge conforme a partícula se aproxima de $z = \frac{1}{2g}$. Todavia, se compararmos (9) com (11), vemos que os papéis se invertem — na métrica de mundo brana, a aceleração própria da partícula estudada não possui termo uniforme, enquanto a da métrica de parede de domínio possui.

Podemos utilizar a seguinte equação, que nos fornece a aceleração gravitacional inicial e local, para analisar as acelerações produzidas pelas soluções estudadas:

$$g(z) \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\left(\frac{d(\sqrt{-g_{00}})}{dz}\right). \tag{13}$$

Dessa equação, obtemos:

$$g_{\text{Brana}}(z) = -g[\Theta(z) - \Theta(-z)], \tag{14}$$

$$g_{\text{Parede-de-domínio}}(z) = -\frac{g}{2(1-2g|z|)}[\Theta(z) - \Theta(-z)]. \tag{15}$$

Das equações acima, concluímos que a aceleração local inicial produzida pela métrica do mundo brana é constante, diferentemente daquela produzida pela parede de domínio que, além de não ser constante, diverge em $z = \frac{1}{2g}$. Com as últimas conclusões, verificamos um fenômeno presente na relatividade, mas com o qual não precisamos lidar na mecânica Newtoniana: a aceleração à qual chegamos através de nossos cálculos depende do referencial no qual realizamos tais cálculos.

O artigo em seguida trata das condições energéticas e das fontes de energia e matéria para as soluções dadas. Como já mencionado, ambas as métricas possuem tensores de Energia-Momento com termos T_{00} e T_{ii} não nulos, isto é, além dos termos de densidade de massa-energia, temos termos de pressão e tensão. Mais uma vez, encontramos uma divergência em relação ao caso Newtoniano, para o qual apenas T_{00} é não nulo. O artigo menciona que a razão para a presença de tais termos não nulos é a de que caso tivéssemos apenas $T_{00} \neq 0, T_{00} \propto \delta(z)$, as soluções encontradas não seriam estáveis, e colapsariam sob influência de suas próprias atrações graviatacionais. Assim, os termos de pressão e tensão servem para estabilizar os de densidade de massa-energia, e manter a configuração estática. Vamos, agora, analisar as condições energéticas para as soluções estudadas. As três principais condições energéticas são a **Condição energética fraca**, a **Condição energética forte** e a **Condição energética dominante**. Para a métrica do mundo brana, temos:

$$\rho = -\frac{g}{4\pi G}\delta(z) < 0, \quad \rho + p_i = 0, \tag{16}$$

$$\rho + \sum_i p_i = \frac{3g}{4\pi G}\delta(z) > 0, \tag{17}$$

$$-\rho = \frac{g}{4\pi G}\delta(z) = p_i = \frac{g}{4\pi G}\delta(z) > \rho = -\frac{g}{4\pi G}\delta(z). \tag{18}$$

Assim, a métrica satisfaz à condição energética forte, mas viola as outras duas. Para a da parede de domínio:

$$\rho = \frac{g}{4\pi G}\delta(z) > 0, \;\; \rho + p_i = \frac{3g}{4\pi G}\delta(z) > 0, \tag{19}$$

$$\rho + \sum_i p_i = 0, \tag{20}$$

$$-\rho = -\frac{g}{4\pi G}\delta(z) < p_i = -\frac{g}{16\pi G}\delta(z) < \rho = \frac{g}{4\pi G}\delta(z). \tag{21}$$

Portanto, a métrica da parede de domínio satisfaz as três condições energéticas.

3 Conclusão

Ao longo deste trabalho, pudemos verificar que as duas métricas descritas em (2) e (6) funcionam como possíveis versões relativísicas do plano infinito Newtoniano. Como visto, para que tais soluções mantivessem as características fundamentais do modelo clássico — tal como um tensor de energia-momento T com densidade de massa-energia planar $T_{00} \propto \delta(z)$ e uma aceleração inicialmente uniforme em direção ao plano em algum dos referenciais — foi preciso que as soluções possuíssem uma série de outras características não presentes no análogo Newtoniano.

Como já era esperado, por estarmos inseridos no contexto da Relatividade Geral, a aceleração em direção ao plano depende do referencial no qual ela é calculada. Em ambas as soluções, esta aceleração é proporiconal à velocidade da partícula. Além disso, para que as soluções sejam estáticas, existem componentes do tensor de energia-momento responsáveis pelo aparecimento de pressões ou tensões(e no caso da primeira métrica, de uma constante cosmológica).

Os resultados alcançados ao longo deste projeto propiciaram uma compreensão mais aprofundada da Teoria da Relatividade Geral, tanto do ponto de vista matemático quanto do físico. A tentativa de apresentar uma versão relativística de um problema já conhecido da mecânica clássica possibilitou uma compreensão tanto das semelhanças quanto das divergências existentes entre as duas teorias.

Bibliografia

[1] JONES, Preston; MUÑOZ, Gerardo; RAGSDALE, Michael; SINGLETON, Douglas. **The general relativistic infinite plane**.

[2] CARROLL, Sean. **Spacetime and Geometry**. Primeira edição. Califórnia, EUA: Addison Wesley, 2004.