



# Modos Topológicos em Guias de Onda Não-*Hermitianos* e Não-Recíprocos Unidimensionais

Danilo Braghini<sup>a</sup>, Luis G. G. Villani<sup>a</sup>, Matheus I. N. Rosa<sup>b</sup>, José R. de F. Arruda<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidade Estadual de Campinas

<sup>b</sup> University of Colorado Boulder

## 1 Introdução

A Fonônica é um novo ramo da física da matéria condensada que tem se tornado um tópico de pesquisa em alta nos últimos anos devido às potenciais aplicações em engenharia mecânica, tal qual ocorre já há algum tempo com a fotônica aplicada à engenharia elétrica. Dentre outros aspectos, esse campo de estudos possibilita o projeto de cristais fonônicos (PC)s. Materiais fonônicos/fotônicos exibem propriedades dinâmicas/eletromagnéticas que podem ser estudadas segundo a teoria de topologia. Por esse motivo, alguns de seus modos são ditos modos topológicos. Um novo tipo de modo topológico (*skin mode*) começa a aparecer na literatura científica, ligado a sistemas não-*Hermitianos*. A não reciprocidade torna viável grandes amplificações para frequências selecionadas, permitindo modos de vibrar com concentração espacial, além de topologicamente protegidos. Essas novas propriedades, recentemente estendidas a estruturas mecânicas, podem encontrar aplicação no projeto de dispositivos tais como filtros, divisores, amplificadores e guias de ondas [1].

## 2 Modelos e Métodos

Inicialmente, foram estudados sistemas de parâmetros concentrados. Os resultados obtidos foram então estendidos para modelos de parâmetros distribuídos de guias de ondas elásticas e, finalmente, para materiais piezoelétricos, que podem ser usados como sensores e atuadores.

Os métodos utilizados foram o dos elementos espectrais (SEM), que fornece resultados semi-analíticos para a obtenção dos diagramas de dispersão, e o dos elementos finitos (FEM), que obtém boas aproximações além de possibilitar a simulação eficiente das respostas transitórias do sistema.

A estabilidade dos sistemas estudados é um problema ainda não explorado com profundidade na literatura e para garanti-la foi inserido amortecimento viscoso de *Rayleigh*. Visando equivalência entre os modelos de amortecimento em ambos os métodos, foi desenvolvida uma função de calibração.

### 2.1 Modelo de Parâmetros Distribuídos

Modelos físicos mais realistas para sistemas dinâmicos de interesse prático descrevem as propriedades do sistema de forma contínua. O exemplo apresentado na Fig. 1 representa a célula

unitária, cuja repetição periódica forma o modelo constituído de um material piezoelétrico, que pode ser visto como guia de ondas longitudinais. Esse material foi matematicamente modelado pelas suas equações constitutivas. Nos modelos, as condições de contorno elétricas definem um circuito aberto no segmento sensor e uma tensão aplicada proporcional à tensão medida no sensor (realimentação com ganho proporcional), no segmento atuador.

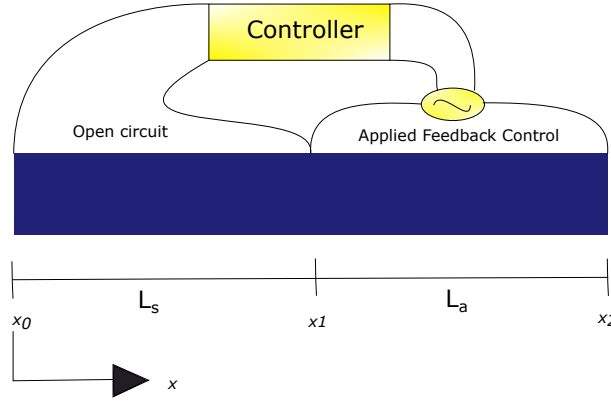


Figura 1: Célula unitária do material (sistema periódico) piezoelétrico ativo

### 3 Resultados

#### 3.1 Diagramas de Dispersão Expandidos

A versão expandida da parte propagativa (bandas de passagem denotadas  $PBs$ ) da relação de dispersão torna-se necessária quando passamos a analisar a topologia de diagramas com  $\omega$  complexo. Caso contrário, recairíamos em erros de interpretação relacionados à não reciprocidade. A Fig. 2a e Fig. 2b representam o diagrama de dispersão obtido para o cristal piezoelétrico da Fig. 1, considerando-se as quatro primeiras  $PBs$ . Os parâmetros do controlador são o ganho  $\kappa_g$  e o parâmetro de localidade  $a$  que representa a distância relativa, em número de células, entre o sensor utilizado e o atuador onde é aplicada a tensão gerada no sensor. Os valores usados foram  $\kappa_g = -2$  (realimentação negativa) e  $a = 0$  (controle local).

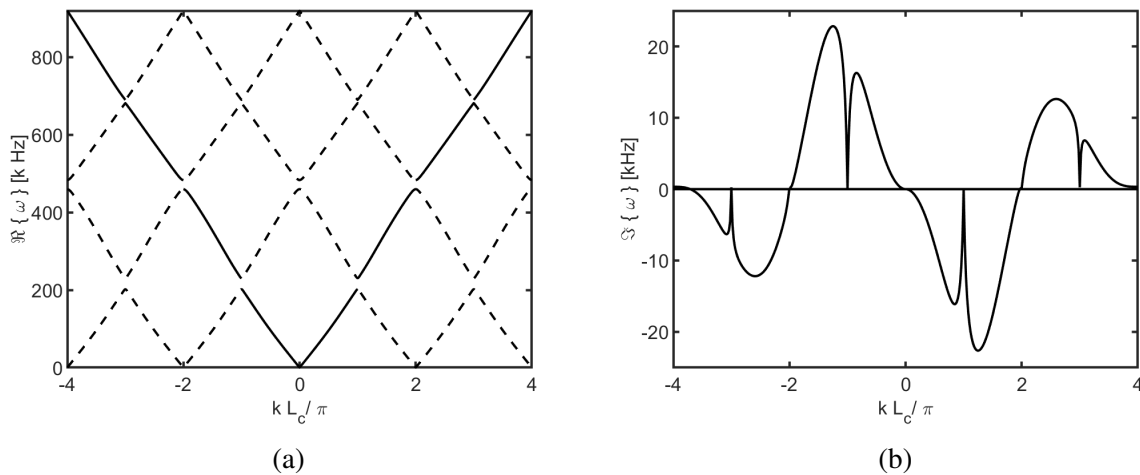


Figura 2: Diagrama de dispersão expandido do cristal piezoelétrico

A parte imaginária, que seria nula em um sistema *Hermitiano* típico, ou recíproca em um sistema *Hermitiano* trivial (obtido caso se insira apenas o amortecimento, por exemplo), evidencia a chamada não reciprocidade.

A interpretação do diagrama é pautada na observação da solução de onda dada por  $u(x, t) = U e^{i(\omega t - kx)}$ , em que  $\omega$  é a frequência relacionada ao número de onda  $k$  pela relação de dispersão da Fig. 2. Vê-se que a parte imaginária de  $\omega$  está associada a um decremento ou amplificação exponencial da solução, dependendo, respectivamente, se  $\Im\{\omega\} > 0$  ou  $\Im\{\omega\} < 0$ . Pela convenção adotada,  $k > 0$  indica ondas propagando-se da direita para a esquerda enquanto que  $k < 0$  indica propagação no sentido contrário. Com isso, interpreta-se, na Fig. 2b, que cada *PB* amplificará ondas propagando-se em um sentido e atenuará as ondas que se propagam no sentido contrário. Analisando o comportamento vibratório do sistema do ponto de vista de propagação de ondas, pode-se, portanto, prever que a vibração será localizada em uma das extremidades do sistema unidimensional, dependendo de quais bandas estiverem sendo excitadas.

### 3.2 Não-Reciprocidade da Relação de Dispersão

Na Fig. 3a a parte real do diagrama de dispersão das duas primeiras *PBs* foi reproduzido em vermelho, para os mesmos parâmetros do controlador. Em tracejado está representado o diagrama do sistema passivo equivalente,  $\kappa_g = 0$ , onde percebe-se pouca variação para o ganho usado com relação ao sistema ativo.

Sobreposta a essa figura encontra-se a transformada de *Fourier* bidimensional (*2DFFT*) do sinal da resposta transitória mostrado na Fig. 3b, em que se confirma a análise feita a partir do diagrama de dispersão da Fig. 2b. A transformada leva o sinal para os domínios de  $\omega$  e  $k$  e a escala de cores ao lado da figura indica a intensidade do espectro, que recai de maneira assimétrica sobre a curva da *2PB*. Ainda, as zonas verde e magenta representam, respectivamente, amplificação e atenuação de ondas (Em  $k > 0$  e  $k < 0$ , respectivamente). A simulação em regime transiente foi feita com uma excitação do tipo *toneburst* de frequência central  $300\text{kHz}$  e 15 ciclos.

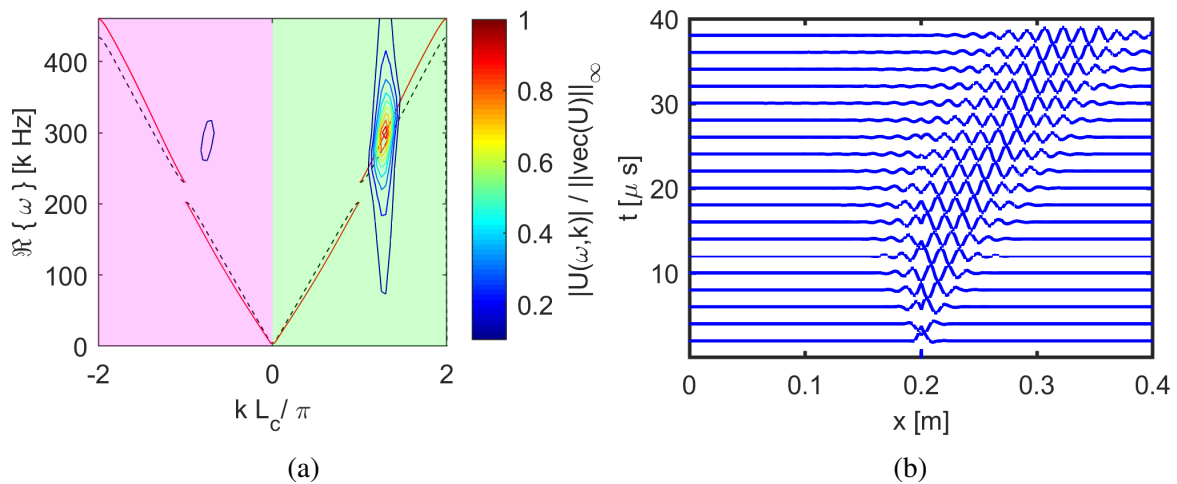


Figura 3: Diagrama de dispersão com parte real da frequência (a). As linhas tracejadas referem-se ao sistema passivo equivalente. A faixa verde indica zonas de amplificação de ondas, enquanto a magenta indica atenuação. Sobreposto em (a) encontra-se a *2DFFT*. Na legenda da barra de cores,  $\text{vec}(U)$  é a vetorização da matriz  $U$  cujas entradas são  $U(\omega, k)$ . Em (b) se encontra a simulação em transiente.

### 3.3 Modos de Onda Topológicos

Os modos topológicos chamados de *skin modes* são modos localizados em uma das extremidades da estrutura finita formada pelo material não-*Hermitiano*. Esses modos estão associados ao número de voltas que o diagrama de dispersão 3D faz no espaço recíproco, ao se deslocar de  $kL_c = -\pi$  até  $kL_c = \pi$ , como demonstrado recentemente [2].

Na Fig. 4a, mostra-se o plano complexo, onde as *PBs* formam curvas fechadas, bem como os modos próprios normalizados (resposta livre de uma estrutura finita matematicamente modelada pelo *FEM*) associados às frequências próprias (pontos pretos no plano complexo) que confirmam a previsão dada pelo número de voltas. As bandas em vermelho representam uma volta no sentido anti-horário, associada a modos próprios localizados a direita da estrutura (como o modo da *2PB* ilustrado na Fig. 4b), enquanto as bandas em azul representam uma volta no sentido horário, associadas a modos próprios localizados à esquerda (como o modo da *3PB* ilustrado na Fig. 4c).

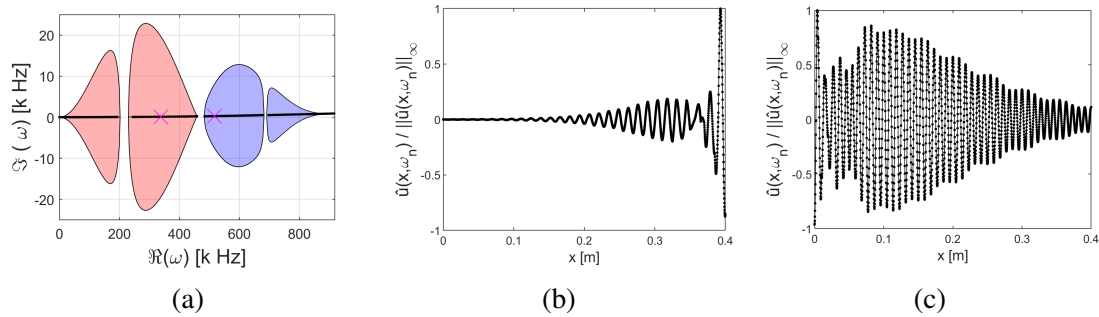


Figura 4: Plano complexo da frequência com frequências próprias em pontilhado (a). Estão marcadas, com x em magenta, as frequências próprias associadas a modos próprios localizados na *2PB* (b) e *3PB*(c).

### 3.4 Resposta em Frequência

A Resposta em frequência mostra as concentrações de energia que cada *PB* apresenta em uma das extremidades da estrutura, com resultados coerentes com as análises das sub-seções anteriores (parte imaginária da frequência e número de voltas no plano complexo). Ambas as bandas passantes, *1PB* e *2PB*, têm o espectro concentrado no lado direito da estrutura. O oposto pode ser dito de *3PB* e *4PB* (Fig.(5a)). Esse fenômeno é mais visível quando maior a parte imaginária da frequência, como pode ser confirmado pela reprodução do plano complexo da Fig.(5b)

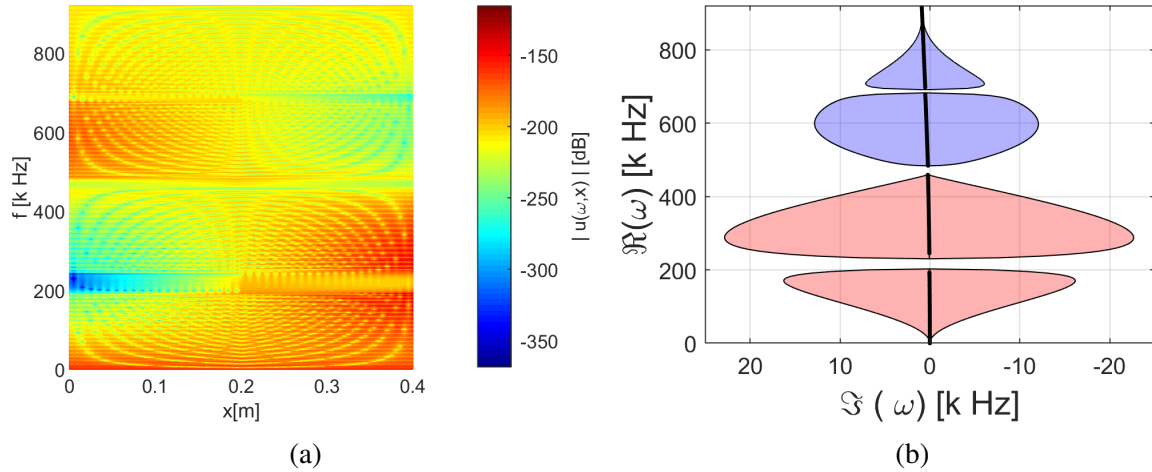


Figura 5: Vistas de cima da resposta em frequência (FRF) do sistema assintoticamente estável projetado (a) ao lado das bandas no plano complexo (b).

#### 4 Conclusões e Perspectivas

Simulações numéricas permitiram a análise de estruturas mecânicas de potencial aplicação em engenharia, em que o sistema responde a excitações externas de forma localizada em uma das extremidades. Os modos topológicos aqui apresentados com métodos numéricos são inéditos em modelos de parâmetros distribuídos. A localidade é também robusta em relação a imperfeições e perturbações externas, uma vez que é garantida pelo invariante topológico (número de voltas na curva do espaço recíproco), como ilustram os resultados da seção anterior.

O presente estudo baseou-se em modelos unidimensionais pois esses provêm análises suficientemente rigorosas acerca do comportamento viscoelastodinâmico fundamental que se quer observar. Além disso, esses sistemas são economicamente razoáveis de se construir para futuras investigações experimentais. O próximo passo é, portanto, confirmar experimentalmente a teoria e simulações trabalhadas neste projeto. Os resultados obtidos até aqui, bem como as devidas formulações usadas, serão publicados em artigo científico em breve.

#### 5 Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo processo nº 2019/20235-9. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade dos autores e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

#### Referências

- [1] M. I. Rosa and M. Ruzzene, “Dynamics and topology of non-hermitian elastic lattices with non-local feedback control interactions,” *New Journal of Physics*, vol. 22, no. 5, p. 053004, 2020.
- [2] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, “Topological phases of non-hermitian systems,” *Physical Review X*, vol. 8, no. 3, p. 031079, 2018.