



# XXVIII Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

**PROJETO: 'Estudo da Álgebra de Quatérnions Aplicada a Dinâmica de Rotações'**

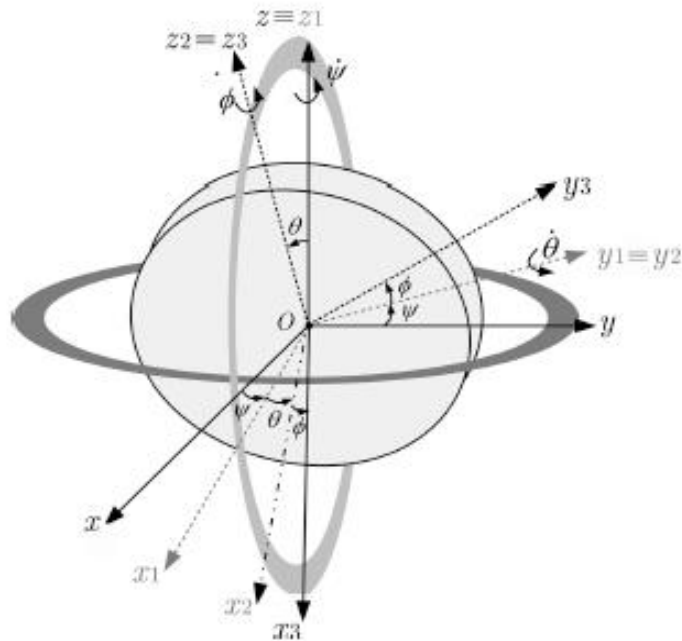
**Bolsista PIBIC: Victor Fernando Cordeiro Lopes**

**Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Tiago Henrique Machado**

Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)  
Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM)  
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)



# EXEMPLO TRADICIONAL: GIROSCÓPIO



Matriz de rotação entres os sistemas inercial e  $B3$ :

$$\mathcal{R}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ -(\cos \psi \cos \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi) & \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta & \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_3 \omega = \begin{bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{\sin \theta} (\omega_{y3} \sin \phi - \omega_{x3} \cos \phi) \\ \dot{\theta} = \omega_{x3} \sin \phi + \omega_{y3} \cos \phi \\ \dot{\phi} = \omega_{z3} - \dot{\psi} \cos \theta \end{cases}$$

Equações de Euler para obtenção das velocidades angulares nos eixos principais de inércia:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x3} &= \frac{(I_{y3} - I_{z3})}{I_{x3}} \omega_{y3} \omega_{z3} + \frac{M_{x3}}{I_{x3}} \\ \dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}} \omega_{z3} \omega_{x3} + \frac{M_{y3}}{I_{y3}} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}} \omega_{x3} \omega_{y3} + \frac{M_{z3}}{I_{z3}} \end{aligned}$$

Definição das rotações sequenciais para cálculo do *quatérnion* em  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{q}_{z1} &= \cos \frac{\psi}{2} + k \sin \frac{\psi}{2} \\ \hat{q}_{y2} &= \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \\ \hat{q}_{z3} &= \cos \frac{\phi}{2} + k \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

$$\hat{q} = \hat{q}_{z3} \hat{q}_{y2} \hat{q}_{z1} = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3$$

Equação matricial para cálculo do *quatérnion*:

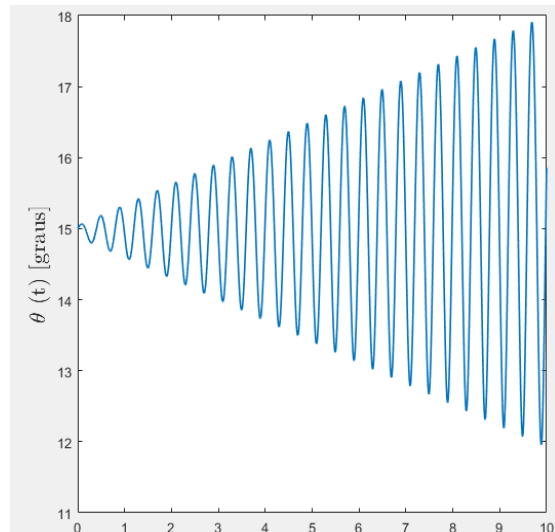
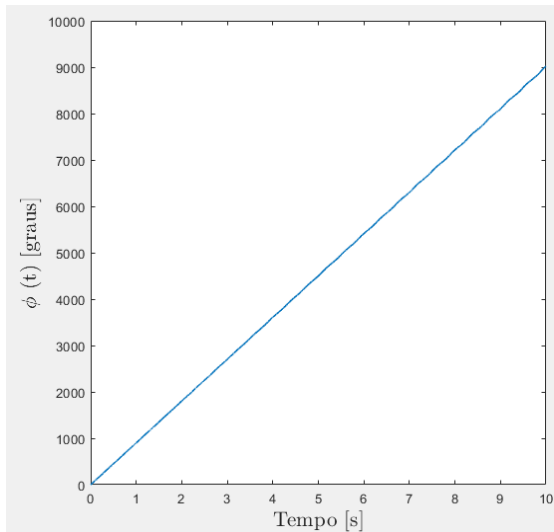
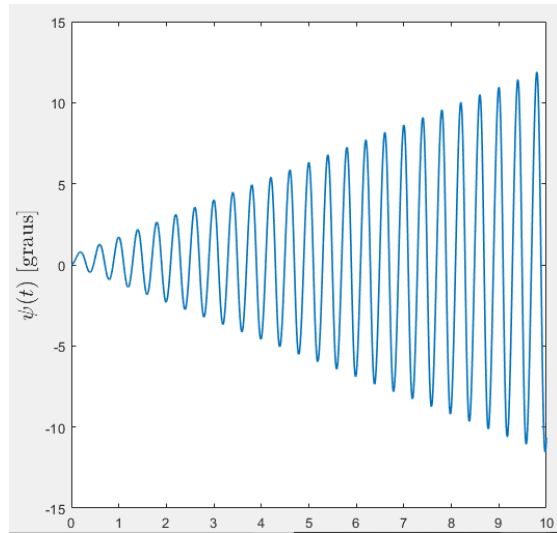
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{bmatrix}$$



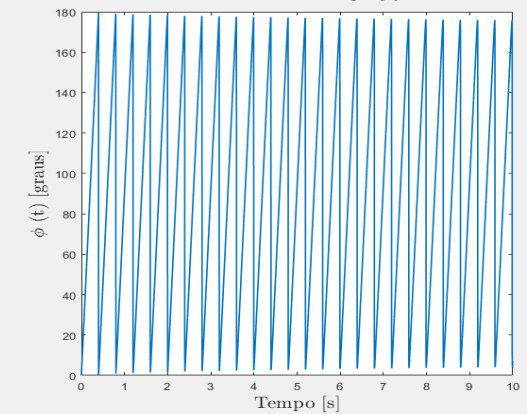
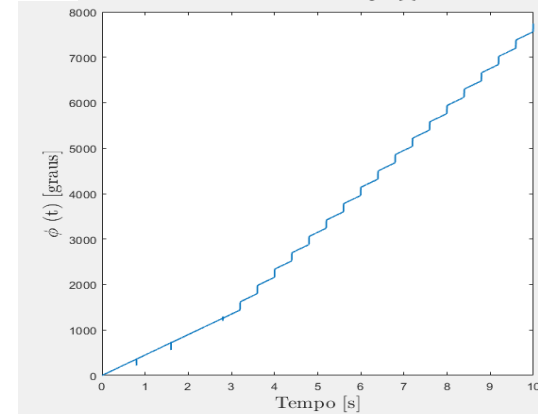
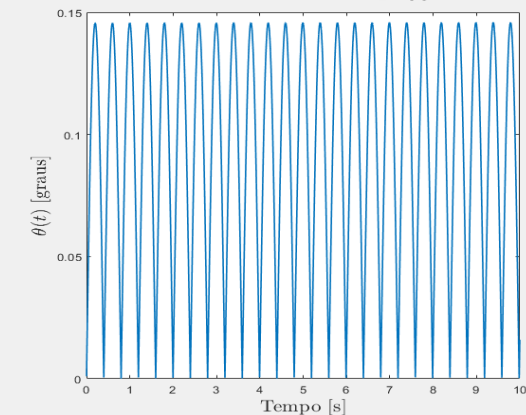
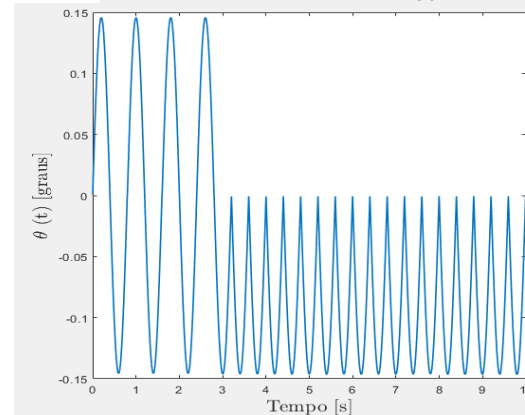
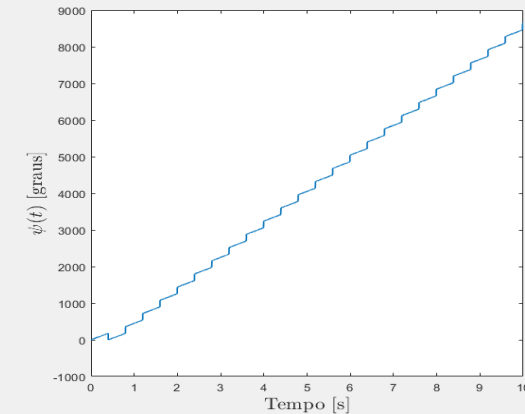
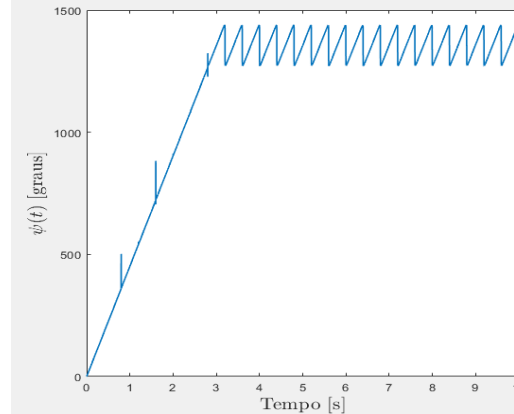
# GIROSCÓPIO: RESULTADOS



Condição Inicial:  $\theta(0) = 15^\circ$ .



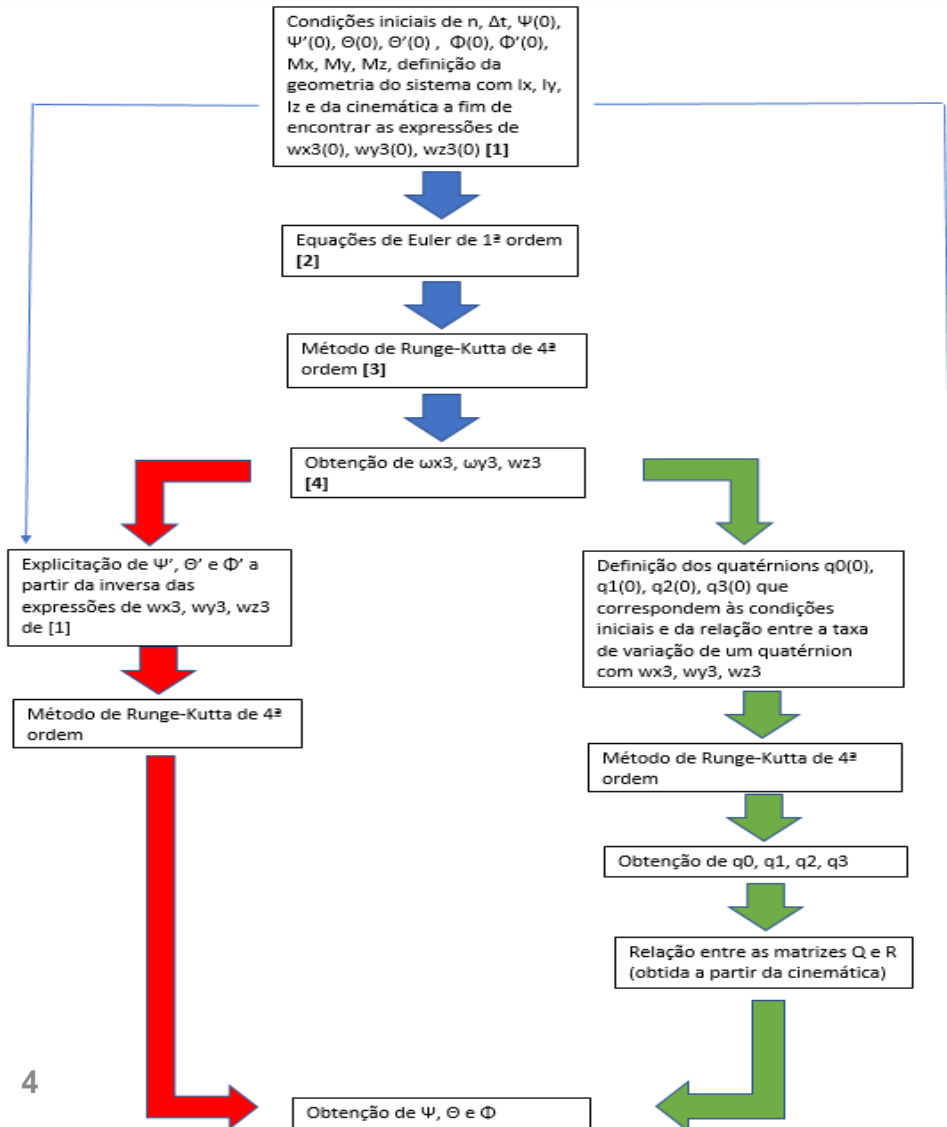
Condição Inicial:  
 $\theta(0) = 0,001^\circ$ .



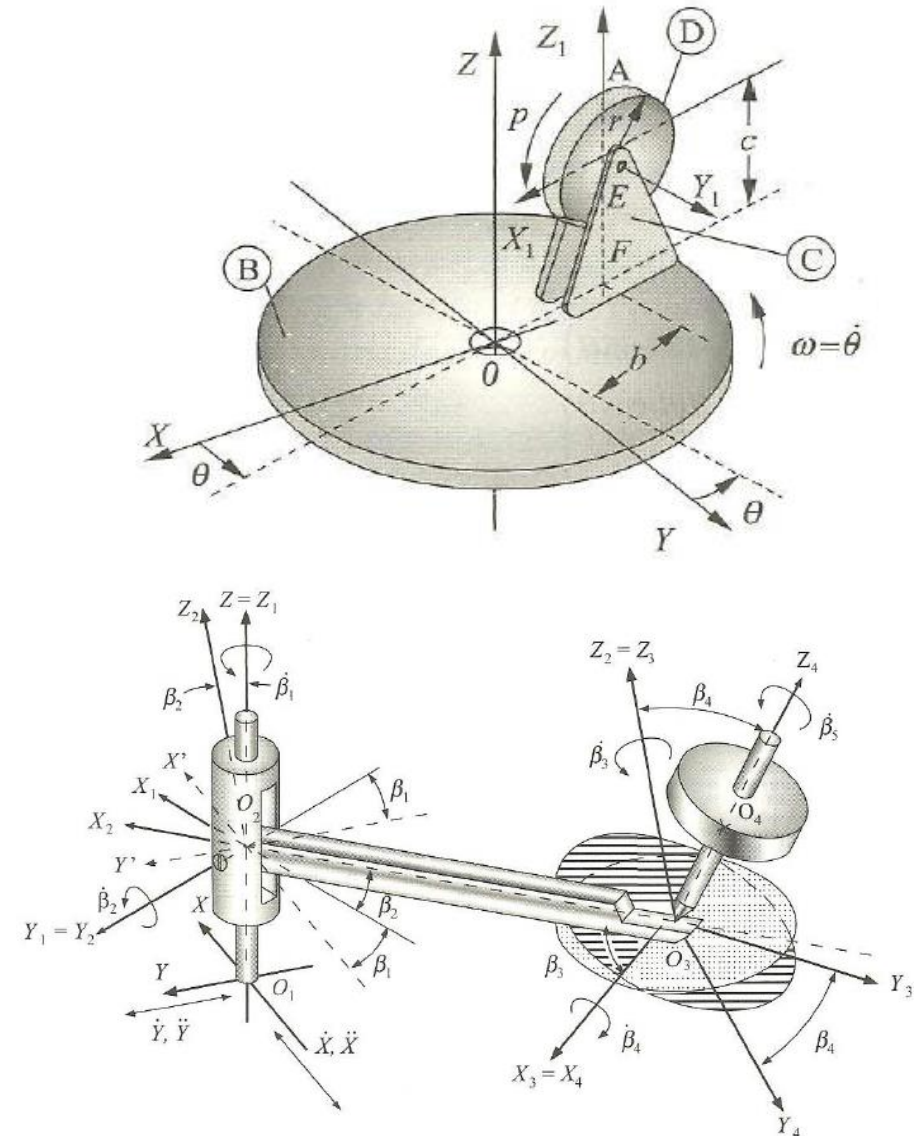
# IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E EXEMPLOS



Lógica do algoritmo implementado:



Outros sistemas analisados:



# CONCLUSÕES

---



- ✓ Embora a resolução de problemas de dinâmica de rotação a partir de *quatérnions* seja mais abstrata e requeira um desenvolvimento maior de relações entre eles e as velocidades angulares, em casos de descontinuidades fornece soluções mais condizentes com o modelo teórico;
- ✓ Em sistemas dinâmicos que possuem quatro ou mais ângulos de Euler, que não podem ser resolvidos via cinemática inversa, esse método se mostra como uma boa alternativa;
- ✓ Os resultados obtidos por meio da álgebra de *quatérnions* são iguais em pontos sem descontinuidade e bem próximos em pontos descontínuos aos obtidos por meio da abordagem clássica de Euler;
- ✓ Além disso, estes são de fato uma poderosa ferramenta para realizar rotações inclusive ao redor de eixos que não os canônicos, além de apresentarem um custo computacional menor;
- ✓ Dessa forma, os *quatérnions* encontram usos em matemática pura e aplicada, em particular para cálculos envolvendo rotações tridimensionais, como em computação gráfica tridimensional, visão computacional e análise de textura cristalográfica.

**OBRIGADO PELA PRESENÇA!**