Os Limites matemáticos do Axioma da Escolha e do Axioma da Determinação

Mahan Vaz Silva Giorgio Venturi

1 Introdução

Sabe-se que a teoria de conjuntos possui diversas formulações diferentes, muitas delas extensamente estudadas e apresentadas após os resultados de Gödel[1] e Cohen[2, 3]. As diferentes formulações da teoria de conjuntos, principalmente quando falamos de **ZF**[1], nos permitem criar modelos que extendem a formulação original e preservam a consistência desta.

Assim, novos estudos se desenvolveram propondo novos axiomas consistentes com **ZF** e que produziam diferentes resultados frutíferos. Em particular, podemos citar o Axioma da Escolha(**AC**), Axioma da Determinação(**AD**) e axiomas de Grandes Cardinais(**LC**), dentre outros. O problema de se admitir diversos modelos consistentes com **ZF** é que, de alguma maneira, pode ocorrer que alguns dos modelos propostos sejam inconsistentes com outros modelos. Um exemplo é o caso de **ZF**+**AD**, que é inconsistente com **ZF**+**AC**, isto é, **AD** implica anegação de **AC**. No entanto, admitir o Axioma da Escolha nos permite desenvolver boa parte da matemática padrão que se conhece, apesar de alguns resultados não usuais poderem ser provados nesse modelo. Por outro lado,o Axioma de Determinação, quando admitido num modelo de conjuntos, preserva boa parte do desenvolvimento matemático, porém é válido num modelo de **ZF** bem mais restrito que **AC**.

Assim, se formos admitir que a teoria de conjuntos é uma boa teoria para se fundamentar a matemática, e além disso, que mais de um modelo para a teoria fundamenta a matemática de maneira

[1]A teoria chamada **ZF** é aquela que admite os axiomas de Extensão, Separação, União, Pares, Potência, Infinito, Substituição e Fundação, propostos por Zermelo[4] e Fraenkel[5].

satisfatória, podemos nos perguntas: O que nos faz escolher um modelo em detrimento de outro? Ou ainda, existe um modelo que seja o modelo legítimo para a teoria de conjuntos? Se precisamos escolhar entre um axioma e outro, qual devemos escolher?

Esta pesquisa propõe investigar possíveis respostas a essas perguntas, avaliando diversos aspectos. Ontologicamente, se é mais viável admitir que exista apenas um universo, chamado normalmente de V, em que toda a teoria de conjuntos é feita, e extensões ou restrições de V seriam manobras nominais, apenas, ou então, se nossa ontologia funciona melhor admitindo-se uma pluralidade de universos de conjuntos, cada um deles instanciando um modelo diferente; Epistemologicamente, se há mudanças cruciais no entendimento de como funciona a matemática quando admitimos diferentes modelos para a toeria de conjuntos, e como a teoria de conjuntos fundamenta essa compreensão; Pragmático, olhando quais modelos desenvolve matemática de maneira mais satisfatória e se existe algum critério claro que nos faça preferir um modelo a outro, neste sentido.

2 Resultados Obtidos

Até o presente momento, dois resultados bastante pertinentes quanto ao critério de avaliação de axiomas foram obtidos. De um lado, conseguiu-se delimitar critérios para se admitir uma forma fraca de pluralismo ontológico em relação aos modelos de **ZF**, que segue, em parte, os trabalhos de Woodin[6]. Por outro lado, também foram encontrados critérios bastante sólidos para a justificação de axiomas, utilizando o que Penelope Maddy chama de justificações extrínsecas[7] e também o método utilizando Princípios de Reflexão, de acordo com o que nos apresenta Peter Koellner[8].

2.1 Universismo e Multiversismo

Quanto ao pluralismo, podemos pensar que de um lado, se admitimos que haja apenas um universo legítimo da teoria de conjuntos, isto é, V definido recursivamente utilizando operações de união e potência de conjuntos, temos um problema em justificar até restrição mais simples deste mesmo universo. Contra-exemplos para esta tese podem ser facilmente encontrados no próprio desenvolvimento elementar da teoria de conjuntos. Tome WF como sendo a classe de todos os conjuntos bem-fundados, definidos recursivamente de maneira análoga aos V_α, elementos de V. Claramente, toda a matemática é feita dentro de WF, ainda que esta seja uma restrição de V. AInda outro exemplo pertinente é o universo L, como apresentado por Gödel. Desta vez a restrição de formação de novos conjuntos está na operação de potência, uma vez que, para cada α na hierarquia, formam-se apenas aqueles conjuntos definíveis em L_α. Estes dois exemplos nos mostram que admitir uma ontologia universista para toda a teoria de conjuntos deixa de lado muitos dos modelos usualmente utilizados por teoristas de conjuntos.

De outro lado, no entando, temos a versão mais geral do multiversismo, endossada por Joel Hamkins[9]. Essa visão admite que o multiverso da teoria de conjuntos é uma *realidade* e todas as teorias de conjuntos seriam suas entidades. Dois problemas enfrentados por essa teoria é que, ela não admite apenas aquelas teorias em que é possível desenvolver a matemática padrão, mas também modelos mais fracos que **ZF**. Além disso, corre-se o risco de se admitir entidades *demais*, isto é, admitir entidades que não são efetivas no estudo e na prática dos teoristas de conjuntos.

Assim, a alternativa encontrada remete a Woodin[6] e Steel[10], em que se desenvolve o chamado Programa do Hiperuniverso(**HP**). Nele, se admitie um multiversismo mais restrito, em que o status ontológico/epistemológico dos modelos não é relevante. O que se espera é obter um multiverso de modelos que sejam ferramentas úteis para a prática matemática. Neste sentido, o multiverso possui como entidades todos os modelos contáveis e transitivosde **ZFC**. Assim, obtém-se o modelo de multiverso com a máxima capacidade explanatória.

2.2 Justificação de axiomas

Nosso segundo resultado se refere ao caráter epistemológico de como justificar a admissão de novos axiomas e modelos para ateoria de conjuntos, bem como compará-los, dada certa prática matemática. Segundo Maddy[7], há dois critérios possíveis para se justificar um axioma dentro de uma teoria: o primeiro, chamado de justificação intrínseca, toma como justificável um axioma se ele segue diretamente, quase que analiticamente, no sentido kantiano, da concepção que se deseja obter na teoria; o segundo critério, justificação extrínseca, determina que um axioma está justificado quando assumí-lo na teoria produz bons resultados.

Exemplos de ambas as justificações são encontradas por toda a matemática. É intrinsecamente justificável, por exemplo que um dos axiomas de Peano diga que para cada número natural, seu sucessor também é natural, ou ainda, que queiramos que uma teoria de conjuntos tenha o axioma da Extensionalidade, afinal, esses axiomas condizem com a ideia que temos quando pensamos em números naturais e conjuntos, respectivamente. De outro modo, axiomas menos intuitivos, mas extremamente úteis, como o Axioma de Substituitção, no caso da teoria de conjuntos, são dificilmente justificados intrinsecamente, mas facilmente justificados extrinsecamente: toda a hierarquia de ordinais depende do teorema de recursão, que por sua vez, depende do axioma de Substituição.

Por vezes, ambas as justificações são tomadas como contraditórias. No entanto, um dos resultados da pesquisa nos diz que é possível haver uma espécie de conciliação entre elas. A alternativa é recorrer a Princípios de Reflexão, como nos mostra Koellner[8], que nos permitiria justificar e construir extensões de **ZF** justificados na metateoria, portanto, de certo modo, justificados intrinsecamente, e também justificá-los extrinsecamente, pois escolheríamos aqueles axioms que nos dão bons resultados (em geral, que provam algum teorema não provável em **ZFC**, por exemplo).

3 Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP, pelo financiamento desta pesquisa, por meio do processo FAPESP 2019/26495-2.

4 Bibliografia

[1] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12):56–57, 1938.

[2] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(6):1143–1148, December 1963.

[3] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis ii. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51(6):105–110, January 1964.

[4] Ernst Zermelo. Untersuchungen über die grundlagen der mengenlehre i(investigations in the foundations of set theory i). In Heinz-Dieter Ebbinghaus, Akihiro Kanamori, and Fraser Craig G, editors, *Ernst Zermelo - Collected Works/Gesammelte Werke*, volume 21 of *Schriften der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse*, pages 188–229. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st edition, 2010.

[5] Adolf Fraenkel. Zu den grundlagen der cantor-zermeloschen mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 86:230–237, 1922.

[6] W. Hugh Woodin. *The Continuum Hypothesis, the generic-multiverse of sets, and the* Ω*-Conjecture*, volume 36, pages 13–42. Cambridge University Press, 2011.

[7] Penelope Maddy. *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford University Press, 2011.

[8] Peter Koellner. The search for new axioms, 2003.

[9] Joel Hamkins. The set-theoretic multiverse. *The Review of Symbolic Logic*, 5(3):416–449, 2012.

[10] John Steel. *Gödel's Program*, pages 153–179. Cambridge University Press, 2014.

[11] Penelope Maddy. Set-theoretic foundations. In Peter Koellner Andrés Eduardo Caicedo, James Cummings and Paul B. Larson, editors, *Foundations of Mathematics*, volume 690 of *Contemporary Mathematics*, pages 289–322. American Mathematical Society, 2017.