Grupos de Lie e Variedades Homogêneas

Augusto Bubenik*, Rafael de Freitas Leão

Resumo

Este trabalho consiste no estudo dos chamados grupos de Lie, suas propriedades e aplicações. Com a construção de certas aplicações específicas, denominadas ações, em variedades, podemos extrair diversas propriedades dos objetos em si. Caracteristicas interessantes podem ser demonstradas no caso em que a ação do grupo de Lie em uma variedade defini uma variedade homogênea. Um caso extremamente importante pode ser construído com a ação do grupo de isometrias em uma variedade riemanniana ou pseudoriemanniana. Construçós como esta são de estrema importância para a descrição matematicamente rigorosa das leis da física, com especial importância para a relatividade geral.

• Introdução

Existem várias estruturas que podem ser adicionadas a uma variedade diferenciável. Uma destas estruturas, com notável importância, é uma estrutura de grupo cujas operações de grupo sejam suaves. Estes são denominados grupos de Lie.

É possível construir aplicações suaves destes grupos em uma variedade. Uma variedade munida de uma ação por grupo de Lie, G, é denominada um G-espaço suave. Estruturas de G-espaços são úteis em diversas aplicações, como por exemplo, encontrar componentes conexas de variedades, construir estruturas de variedades em conjuntos munidos de uma ação por grupo de Lie, de maneira única, entre outros.

Além disso, o grupo das isometrias de uma variedade riemanniana são um grupo de Lie e definem uma ação na variedade, contribuindo para um melhor entendimento destas estruturas, além de contribuir para a física, em especial a relatividade geral, onde as variedades são bastante usadas na descrição da teoria.

• Discussão

Definição 0.1. *Considere uma variedade diferenciável G com estrutura de grupo. Suponha que a multiplicação $\cdot : G \times G \to G$ e a aplicação $Inv : G \to g$, definida por $Inv(g) = g^{-1}$, sejam suaves. Então, G é um grupo de Lie.*

Dado uma variedade M e um grupo de Lie, G, podemos definir uma aplicação $\theta : G \times M \to M$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \theta(g_1, \theta(g_2, p)) &= \theta(g_1 g_2, p) \\ \theta(e, p) &= p, \end{aligned}$$

onde $g_1, g_2, e \in G$, com e o elemento neutro, e $p \in M$. Esta aplicação é denominada uma ação a esquerda em M por G e M passa a ser denotado por um G-espaço se θ é continuo e G espaço suave, se θ é suave. Definção completamente análoga ocorre para aplicações $\theta : M \times G \to M$, denominadas ações a direita. Uma outra notação comum para ações é $\theta(g, p) = g \cdot p$. A ação é dita transitiva se, para todo $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$.

Definição 0.2. *Seja M, N G-espaços. Uma aplicação $F : M \to N$ é* ***equivariante*** *se satisfaz*

$$F(g \cdot p) = g \cdot F(p).$$

Estas estruturas nos permitem apresentar um exemplo de aplicação. Podemos tomar o grupo das matrizes invertíveis $GL(n, \mathbb{C})$. Este grupo é uma variedade e podemos observar que possui uma estrutura de grupo de Lie. Este grupo possui importância através de sua associação com transformações lineares, entre outras coisas, podendo construir, assim, ações em espaços vetoriais neste sentido. Podemos definir alguns subgrupos deste objeto. Entre eles,

- O grupo $SL(n, \mathbb{C})$ das matrizes de determinante igual a 1. Transformações definidas por estas matrizes preservam volume e orientação.
- O grupo $U(n, \mathbb{C})$ das matrizes unitárias, cujas matrizes adjuntas coincidem com as matrizes inversas.
- O grupo $SU(n, \mathbb{C}) = U(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

Definindo mapas equivariantes específicos, podemos demonstrar que cada um destes subgrupos são subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$, de dimensão, respectivamente, $2n^2 - 2$, n^2 e $n^2 - 1$. Com esta estrutura podemos definir ações em campos vetoriais ou subvariedades deles. Podemos também transferir facilmente dos $\mathbb{C}$ para os $\mathbb{R}$. Um exemplo interesssante acontece com a ação do grupo ortogonal $O(n+1) \subset U(n+1, \mathbb{C})$. É facilmente demonstravel que $O(n+1)$ é um grupo de Lie agindo transitivamente na esféra $\mathbb{S}^n_R$. $O(n+1)$ é, de fato, um grupo de isometrias para a esféra e contribuem para a construção das curvas geodésicas da mesma. Podemos citar que em uma variedade riemanniana, ou seja, uma variedade munida de um tensor positivo definido e simétrico, g, denominado métrica, podemos construir uma ação pelo grupo de isometria, que é um grupo de Lie.

Definição 0.3. *Dado um grupo de Lie, G, uma variedade homogênea, ou G-espaço homogêneo, é um G-espaço suave cuja ação é transitiva.*

Em várias situações, podemos munir uma variedade com uma ação transitiva por grupo de Lie, como é o caso da ação de $O(n+1)$ em $\mathbb{S}^n_R$, mencionada acima.

Podemos definir algumns conceitos a respeito destas variedades. Denotaremos por G_p, o subgrupo de Lie de G, onde p pertence ao G-espaço, M, definida por

$$G_p := \{g \in G |\, g \cdot p = p\},$$

denominada orbita de p. G_p é denominado grupo isotrópico. Defina o grupo quociente

$$G/G_p := \{gH |\, g \in G\},$$

onde H é um subgrupo de Lie de G e

$$gH = \{g \cdot h |\, h \in H\}.$$

Com estas definições, temos um importante teorema a respeito de variedaes homogêneas.

Teorema. *Seja M um G-espaço homogêneo e $p \in M$. Então, um mapa $F : G/G_p \to M$, definido por*

$$F(gG_p) := g \cdot p,$$

é um difeomorfismo equivariante.

Observação. *A estrutura diferencial de G/G_p pode ser construida de maneira única para que o mapa quociente, $\pi : G \to G/G_p$ seja uma submersão, pelo fato de G_p ser fechado.*

O teorema acima nos garante que podemos entender as variedades homogêneas apenas estudando as propriedades dos grupos quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados de Lie.

Considere uma ação em um conjunto X por grupo de Lie, G, transitiva. Suponha que exista um grupo isotrópico fechado de algum $p \in X$. Então, existe única estrutura diferenciável em X tornando a ação suave. Isto demonstra o poder das ações homogêneas e a importância do estudo dos grupos de Lie para o entendimento das variedades diferenciáveis.

Uma aplicação interessante está na determinação da conectividade de um G-espaço, M, através da conectividade de G e de

$$M/G := \{G \cdot p |\, p \in M\},$$

onde

$$G \cdot p = \{g \cdot p |\, g \in G\}$$

é denominado orbita de p.

Com isso, podemo concluir que $U(n)$, $SU(n)$ e $SO(n)$ são conexos. Além disso, $SO(n)$ é uma das duas componentes conexas de $O(n)$. Também podemos deduzir que as componentes conexas de $GL(n, \mathbb{R})$ são $GL(n, \mathbb{R})^+$ e $GL(n, \mathbb{R})^-$, respectivamente os conjuntos de matrizes com determinante positivo e negativo.

Podemos extrair exemplos de ação de grupos através de campos vetoriais. De fato, é possível gerar curvas através de um campo vetorial e um ponto p de uma variedades diferenciável, M. Além disso, podemos construir uma aplicação $\theta : \Omega \subset \mathbb{R} \times M \to M$, denominada fluxo, onde $\theta(\cdot, p)$ é uma curva integral do campo vetorial em questão. Nos casos que a projeção de Ω em $\mathbb{R}$ é o próprio $\mathbb{R}$, podemos entender θ como uma ação do grupo de Lie unidimensional $\mathbb{R}$ na variedade.

Em variedades riemannianas, podemos obter algumas isometrias da variedade geradas pelos fluxos dos vetores de Killing. Estes vetores são construções feitas com a ajuda do conceito de derivada de Lie, denotadas por $\mathscr{L}_.$ Esta derivada é uma generalização da derivada direcional em $\mathbb{R}^n$. Mais especificamente, um vetor de Killing, X é definido com um vetor que satisfaz

$$\mathscr{L}_X g = 0.$$

Podemos associar vetores de killing com constantes conservadas em geodésicas. Com isso, temos uma técnica para encontrar simetrias em uma variedade riemanniana.

• Conclusão

Neste trabalho, foi possível fazer uma introdução aos grupos de Lie e identificar sua importância para o estudo das variedades diferenciáveis. Além disso, foi possível estudar aplicações pontuais e iniciar-se ao estudo das variedades riemannianas, identificando, entre outras coisas, uma estrutura de ação por grupos de Lie nestes objetos.

• Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Referências

[1] Lee, J. M. Riemannian Manifolds: An introduction to Curvature: 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1997

[2] Lee, J. M. Introduction to Smooth Manifolds: 1. ed. New York: Springer-Verlag, 2000.