



Utilização do Método de Marcha no Tempo Dual para a Formulação de Modelos de CFD

Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica

Estudante: Felipe Margonato de Sousa - RA:171135

Orientador: William Roberto Wolf

Introdução

A fluidodinâmica computacional (CFD) é uma ferramenta numérica capaz de solucionar sistemas de equações para o escoamento de um fluido. Sua aplicação prática se deu a partir do desenvolvimento tecnológico e computacional nos anos de 1960. Essa ferramenta apresenta vantagens quando comparado aos métodos analíticos e experimentais, devido à sua capacidade de modelar e solucionar problemas relacionados a equações diferenciais não lineares, como as de Navier Stokes [1], a um menor custo financeiro e de tempo.

Em contrapartida, o erro associado aos resultados obtidos por modelos numéricos e computacionais depende exclusivamente das técnicas empregadas na discretização das equações. Assim, caso aplicado num projeto, deve-se definir um erro máximo tolerável que irá depender do tempo disponível para análise e caso de aplicação.

Este trabalho irá discutir sobre uma classe de métodos numéricos conhecida por método de marcha no tempo dual que é capaz de reduzir o custo computacional e manter a qualidade da solução. Métodos de marcha no tempo dual encontram aplicações em problemas com “rigidez” numérica como aqueles envolvendo a propagação de ondas, turbulência e combustão.

Objetivos

O presente projeto tem como objetivo principal investigar, desenvolver e aplicar métodos de marcha no tempo dual em problemas relacionados a problemas não-estacionários e transientes com aplicações em escoamentos de fluidos. Para tal, busca-se compreender técnicas de discretização numérica a partir dos fundamentos descritos em [2], investigando as características associadas à estabilidade e acurácia ao aplicar métodos de marcha no tempo explícito e implícito em problemas físicos.

Desse modo, baseado em [3], almeja-se definir formas de aplicação que forneçam alta ordem de precisão, reduza os efeitos da alta rigidez numérica com um baixo custo computacional em problemas práticos do campo da mecânica dos fluidos com este método.

Ademais, são estudadas técnicas de discretização espacial, visto que a solução de equações diferenciais parciais envolve a discretização de outros termos além dos temporais. Além disso, a discretização espacial terá um efeito direto na integração temporal das equações de mecânica dos fluidos uma vez que os autovalores do problema discreto estão diretamente relacionados às raízes principais e espúrias dos métodos de marcha no tempo e, portanto, afetarão tanto a acurácia quanto a estabilidade desses.

Metodologia

Neste trabalho, iremos resolver a equação de onda linear abaixo utilizando diversos métodos numéricos de discretização espacial e temporal. Com isso, pretendemos avaliar o desempenho dos métodos

numéricos na solução de transporte de ondas em um escoamento.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Esta equação simplifica a aplicação de métodos de discretização numérica e, ainda assim, permite a compreensão dos métodos caso sejam aplicados nas equações de conservação mais complexas. Ademais, é possível simular um modelo que apresenta condições periódicas sem a necessidade de condições de contorno que exijam modificações das moléculas de cálculo nas extremidades do domínio computacional. Além disso, a análise de soluções lineares proporciona um entendimento teórico através de técnicas de álgebra linear que ajudam a relacionar os métodos numéricos de marcha no tempo com as discretizações espaciais.

No caso, deseja-se obter o valor da propriedade escalar u , transportada com velocidade a , ao longo de todo o domínio espacial enquanto se avança a solução mediante a aplicação de métodos numéricos para marcha no tempo. Essa discretização causa erros na solução relacionados à amplitude (dissipação) e fase (dispersão). Assim, a adoção de diferentes discretizações em cada derivada impacta diretamente na solução obtida.

Discretização Numérica Espacial

Visando avaliar a influência da discretização numérica espacial, fixou-se uma discretização na derivada temporal e variou-se a discretização no espaço. No tempo, utilizou-se o método de Euler Explícito conforme (2), tal que a malha espacial e temporal utilizada é descrita por $x_j = j \cdot \Delta x$ e $t^n = n \cdot \Delta t$, onde os termos em *subscript* e *superscript* de u indicam, respectivamente, o ponto espacial e instante de tempo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (2)$$

A condição inicial é dada por $u(x, 0) = \text{sen}(k \cdot \pi \cdot x)$ e o domínio espacial é compreendido de $X_{inicial} = 0$ a $X_{final} = 2 \cdot \pi$ e o número de onda k deve ser um número natural para satisfazer a condição periódica do modelo. O passo temporal é definido com base na condição de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL), parâmetro adimensional que influencia diretamente na estabilidade numérica. A ordem do erro da aproximação numérica de $\frac{\partial u}{\partial x}$ é obtida através de expansões em série de Taylor.

Os erros de amplitude e de fase podem ser avaliados através de uma análise de Fourier de modo que a solução numérica irá apresentar um número de onda modificado ik^* . Esse será um número complexo em que a parte real irá indicar o erro de amplitude e a parte imaginária o erro de dispersão.

Discretização Numérica Temporal

Após a discretização numérica espacial, a equação diferencial parcial (1) resulta numa equação diferencial ordinária (EDO) - equação (3). Numa aplicação prática, este equacionamento é dado de forma matricial, em que a matriz A depende diretamente do método de discretização espacial adotado.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = [A] \cdot \vec{u} \quad (3)$$

Aplicando conceitos de álgebra linear, como em (4), obtém-se uma matriz diagonal Λ composta pelos autovalores λ da matriz A . Esses autovalores são consequência da discretização espacial adotada e servem de base na análise de estabilidade do método numérico.

$$[A] = [X] \cdot [\Lambda] \cdot [X]^{-1} \quad (4)$$

Método de Marcha no Tempo Dual

O método de marcha no tempo dual consiste em adicionar uma derivada parcial associada a um tempo fictício τ na discretização. Assim, a equação (1) é convertido em (5). Portanto, é estabelecido o parâmetro adimensional γ que concilia o valor do passo no tempo real e fictício, tal que $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Nessa abordagem τ não apresenta sentido físico, de modo que deseja-se obter a solução em que $\frac{du}{d\tau}$ tenha convergência para zero, a depender da tolerância máxima permitida. Nesse caso, retorna-se à equação original (1) que apresenta sentido físico.

Do ponto de vista da derivada parcial no tempo fictício, não há necessidade de garantir acurácia, pois esta é uma variável auxiliar no equacionamento para determinar a variável de interesse, no caso a propriedade escalar u em função do tempo físico e espaço. Logo, torna-se vantajoso aplicar métodos com melhores propriedades de estabilidade e convergência mais rápida e, portanto, de baixa ordem na discretização numérica na derivada parcial em função do tempo fictício.

Visando este conceito, adotou-se o método de Euler Implícito na discretização numérica do tempo fictício, como em (6). O índice k está associado ao ponto na malha do tempo fictício.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_j^{n+1,k+1} - u_j^{n+1,k}}{\Delta \tau} = - \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^{k+1} \quad (6)$$

A partir da EDO descrita em (3), utiliza-se os métodos Backward de Segunda Ordem Implícito e Euler Implícito no tempo real. Portanto, o valor de $u^{n+1,k+1}$ é definido por (7) e (8).

$$u_{back2nd}^{n+1,k+1} = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot u^{n+1,k} + 4 \cdot \Delta \tau \cdot u^n - \Delta \tau \cdot u^{n-1}}{2 \cdot \Delta t - 2 \cdot \Delta t \cdot \Delta \tau \cdot \lambda + 3 \cdot \Delta \tau} \quad (7)$$

$$u_{euler}^{n+1,k+1} = \frac{\Delta t \cdot u^{n+1,k} + \Delta \tau \cdot u^n}{\Delta t - \Delta t \cdot \Delta \tau \cdot \lambda + \Delta \tau} \quad (8)$$

O código implementado consiste em realizar N iterações para determinar $u^{n+1,k+1}$ e, após isso, marchar no tempo real de modo a iterar, novamente, N vezes no tempo fictício. No caso, propõe-se que $u^{n+1,k} = u^n$ para iniciar o processo iterativo. Numa aplicação real, o valor de N_{iter} deve ser escolhido cuidadosamente, de modo a garantir um menor erro sem um custo computacional excessivo.

Resultados e Discussão

Discretização Numérica Temporal

A partir da equação (3), simulou-se um modelo de primeira ordem nas seguintes condições:

- Discretização numérica temporal utilizando os métodos de Euler Implícito e *Backward* de Segunda ordem Implícito.
- Malha temporal compreendendo o período de 0 a 10 unidades.
- Passo no tempo $dt_1 = 0.05$ e $dt_2 = 0.005$, resultando em $N_1 = 201$ e $N_2 = 2001$ pontos na malha temporal.
- Condição inicial de amplitude $u_0 = 1$.
- Autovalor associado à discretização espacial $\lambda = -0.5 + 5 \cdot i$.

Com o valor de λ adotado, o sistema deve apresentar dissipação, caráter oscilatório e sua solução será estável em regime permanente. A Figura (1) indica a comparação entre os resultados obtidos nesta simulação e a solução analítica do problema:

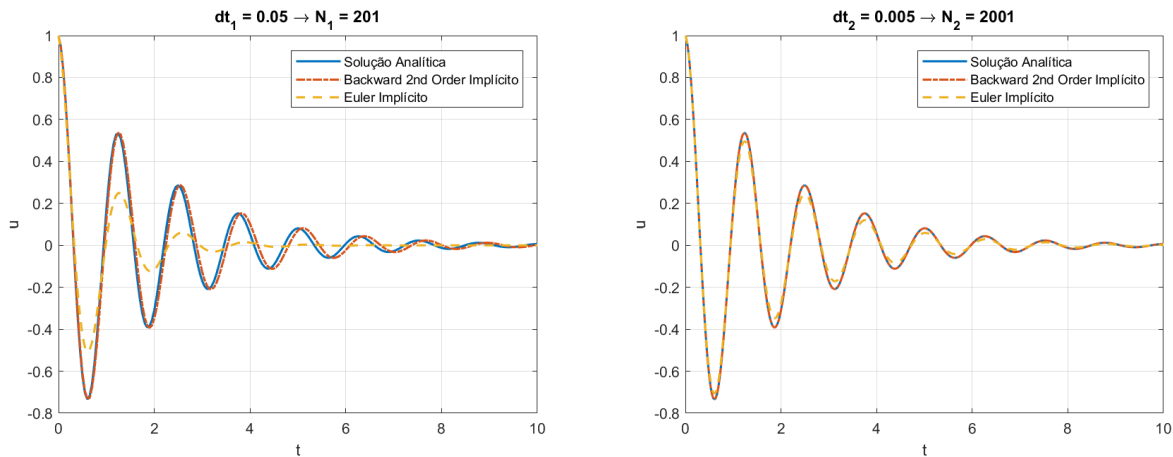


Figura 1: Solução numérica e analítica da EDO com passo no tempo igual à 0.05 e 0.005

Verifica-se, a partir dos resultados, que o método Backward de Segunda Ordem garante exige um menor refino da malha temporal para garantir a acurácia da solução quando comparado ao método de Euler.

Método de Marcha no Tempo Dual

As simulações utilizando o método de marcha no tempo dual também foram baseadas na equação (3) e nas condições descritas na seção anterior. Buscou-se avaliar a influência do valor do passo tempo real e fictício e número de iterações nos resultados.

A partir das Figuras (2) e (3), evidencia-se a influência do número de iterações no pseudo tempo na qualidade da solução. Ou seja, existe um valor mínimo de N_{iter} que torna possível solucionar o problema garantindo acurácia e estabilidade. Ademais, esse valor mínimo irá depender diretamente do passo no tempo real e fictício.

A partir da Figura (4) vê-se em detalhes a influência do número de iterações N_{iter} no erro da solução em distintos casos. Assim, ao adotar um passo de tempo mais refinado, o erro inicial, ao passo que esse será menor que uma malha menos refinada para um maior número de iterações. Ademais, o erro numérico tende a se estabilizar a partir de um número de iterações, indicando que um aumento excessivo desse aumentará o custo computacional sem que haja ganhos do ponto de vista da acurácia.

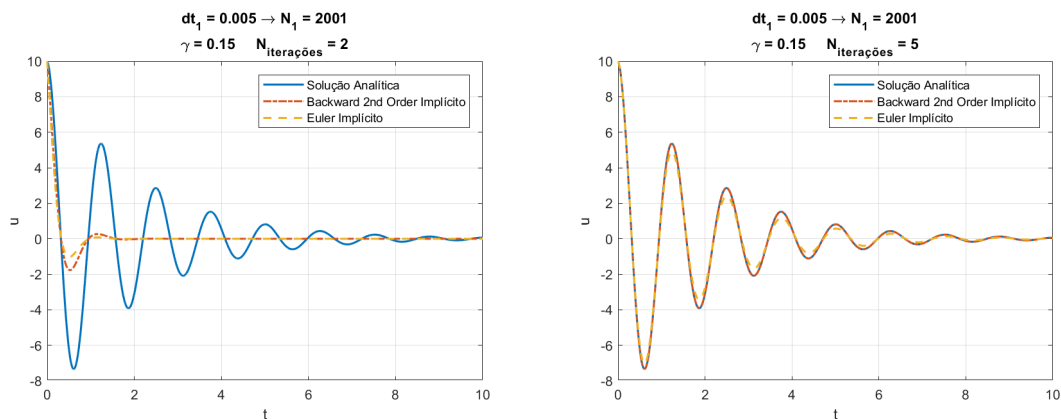


Figura 2: Análise da influência no número de iterações ao aplicar o método de marcha no tempo dual para $\Delta t = 0.005$

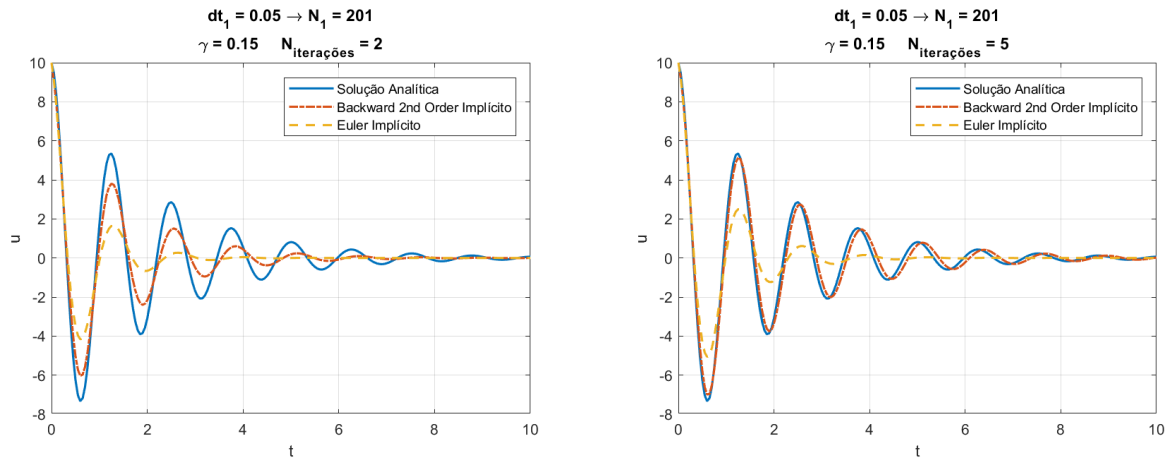


Figura 3: Análise da influência no número de iterações ao aplicar o método de marcha no tempo dual para $\Delta t = 0.05$

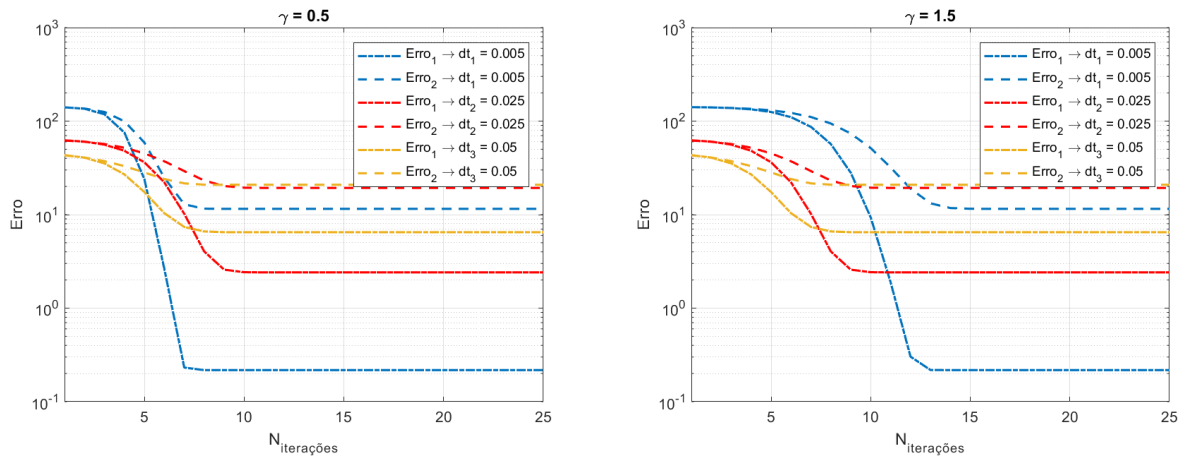


Figura 4: Erro associado à cada método conforme o número de iterações no tempo fictício para $\gamma = 0.5$ e $\gamma = 1.5$

Conclusões

Ao longo deste estudo verificou-se a influência de parâmetros associados à discretização numérica do tempo na acurácia e estabilidade num problema referente à um escoamento de fluido. Além disso, verificou-se a viabilidade de uso do método de marcha no tempo dual nesse mesmo tipo de problema. Assim, quando aplicado de maneira adequada, é possível garantir maior ordem de precisão e menor rigidez numérica com baixo custo computacional.

Referências

- [1] Temam, R.: Navier–Stokes Equations. Rhode Island, (2001).
- [2] Lomax, H., Pulliam, T.H., Zingg, D.W.: Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Springer, Berlin (2001).
- [3] Jonathan J. Chiew, Thomas H. Pulliam: Stability Analysis of Dual-Time Stepping. Stanford, (2016).