XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Estatística

.

PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado

Decomposição do impacto de uma transferência de renda no índice de Gini

Aluno: Vinícius Litvinoff Justus

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Enrique Zevallos Herencia

Órgão financiador: CNPq

Campinas
2020

Resumo: o coeficiente de Gini é um índice de dispersão relativa amplamente utilizado para medir desigualdade de renda e patrimonial. Um resultado conhecido utilizando esse índice é o seguinte: uma vez ordenadas as rendas individuais em ordem crescente, o impacto de uma transferência de renda depende da posição ocupada pelos dois indivíduos envolvidos na transferência e do montante transferido. No entanto, transferências que alteram a posição ocupada pelos indivíduos podem tornar o cálculo do impacto mais difícil do que em transferências onde não ocorre essa mudança. Neste trabalho é apresentada uma forma para calcular o incremento em situações onde a transferência de renda pode alterar a ordem das rendas individuais.

Palavras chave: Desigualdade; Gini; Econometria.

1 Introdução: Índice de Gini e a curva de Lorenz

Seja $L : [0,1] \to [0,1]$ uma função monótona não-decrescente que passa pelo ponto $(1,1)$ e tal que $L(i) \leq i$ para todo $i \in [0,1]$. L será chamada de curva de Lorenz. Na prática, a curva de Lorenz é usada para avaliar o quanto a proporção acumulada de renda cresce em função da proporção acumulada de pessoas, isto é, utiliza-se p (proporção acumulada de pessoas) como variável independente e ϕ (proporção acumulada de renda) como variável dependente. A curva de Lorenz é representada gráficamente no plano $[0,1]^2$, onde p e ϕ são, respectivamente, os eixos horizontal e vertical.

Um caso particular da curva de Lorenz de interesse teórico é aquele na qual assume o maior valor possível em todo $p \in [0,1]$, dada a restrição inicial $L(p) \leq p$, isto é, a reta $\phi = p$. Esta reta descreve uma população na qual todos os indivíduos aferem a mesma renda; por esse motivo é tradicionalmente chamada de *reta da perfeita igualdade*.

É importante pontuar que, na prática, as variáveis p e ϕ são discretas. Assim, sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ as rendas individuais de n indivíduos ordenadas de forma crescente. A renda per capita (μ), a proporção acumulada de pessoas (P_i) e a proporção acumulada de renda (ϕ_i) estão definidas pelas seguintes expressões:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \tag{1}$$

$$P_i = \frac{i}{n}, \tag{2}$$

$$\phi_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{n\mu}, \tag{3}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Deste modo, se queremos definir a curva de Lorenz para uma amostra ou população real, podemos contruí-la usando os pontos (p_i, ϕ_i), vide equações (2) e (3), unidas por segmentos de reta, para $i = 1, \ldots, n$. Na Figura 1 é possível observar uma curva de Lorenz com cinco observações[1] e a reta da perfeita igualdade $\phi = p$.

Seja $G : R^n \to [0,1)$ uma função que associa a um vetor $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ um valor que denominamos como índice de Gini da amostra X. Seja α a área entre

[1] Por convenção, $(0,0) \in L$ para qualquer amostra. No entanto, isso não deve ser interpretado como o fato de que necessariamente há uma observação $X_i = 0$ na amostra.

a reta da perfeita igualdade e a curva de Lorenz, e β a área abaixo da curva de Lorenz. Já que

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

então o índice de Gini da amostra X pode ser calculada como

$$G(X) = 2\alpha, \tag{5}$$

ou como

$$G(X) = 1 - 2\beta. \tag{6}$$

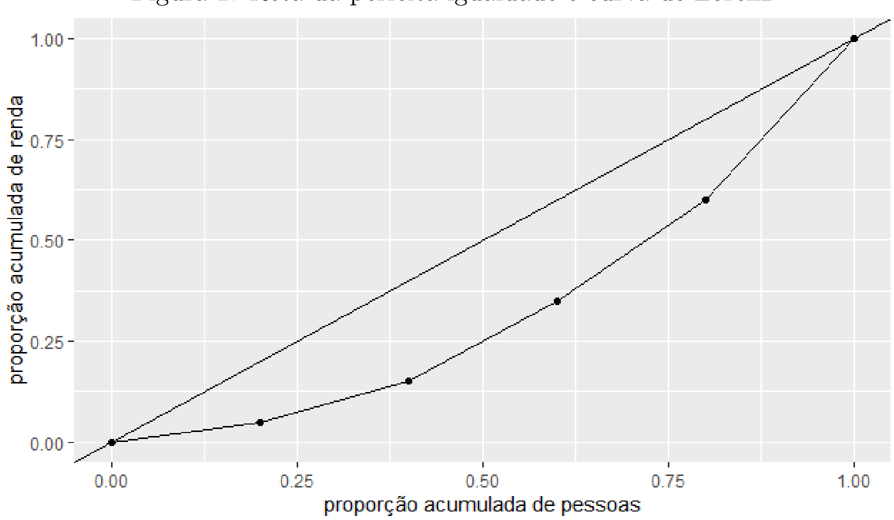
Conforme argumentado em outras obras (HOFFMANN, 1998), uma das formas de deduzir uma expressão para G em função de todas as rendas X_i é interpretar a área β como uma sequência de trapézios, como é possível ver na figura 1; isto é:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n}(\phi_i + \phi_{i-1}), \tag{7}$$

Portanto, de (6) e (7) obtemos:

$$G(X) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi_i + \phi_{i-1} \tag{8}$$

Figura 1: Reta da perfeita igualdade e curva de Lorenz



2 Transferências de renda e o índice de Gini

Seja $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ um vetor com as rendas individuais de n indivíduos ordenadas de forma crescente. Uma transferência de k unidades da i-ésima para a j-ésima pessoa, a que chamaremoa de transferência (i, j, k), será definida como uma alteração dos valores X_i, X_j, que passarão a ter, respectivamente, os valores $X_i - k, X_j + k$.

As seguintes definições serão adotadas:

Definição 1: *O valor retornado pela função $G(X_1, X_2, ..., X_n)$ será chamado de G_0; o valor retornado pela função $G(X_1, ..., X_i - k, ..., X_j + k, ..., X_n)$, onde não* *necessariamente $i < j$, será chamado de G_2. Então $\lambda = \lambda(i, j, k, X) = G_2 - G_0$ é chamado de "impacto"ou "incremento".*

Sabemos que:

$$G(X) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i + \phi_{i-1}. \tag{9}$$

É fácil perceber que $\sum_{i=1}^{n} \phi_i + \phi_{i-1} = (\phi_1 + \phi_0) + (\phi_2 + \phi_1) + (\phi_3 + \phi_2) + ... + (\phi_n + \phi_{n-1})$. Isto é, $\sum_{i=1}^{n} \phi_i + \phi_{i-1} = \phi_0 + \phi_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^{n} \phi_i$, pois $\phi_0 = 0$ e $\phi_n = 1$. Portanto:

$$G(X) = 1 - \frac{1}{n}[-1 + 2 \sum_{i=1}^{n} \phi_i]; \tag{10}$$

$$G(X) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i. \tag{11}$$

Substituindo o valor de ϕ_i pela expressão (3):

$$G(X) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{n\mu}; \tag{12}$$

$$G(X) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} X_j; \tag{13}$$

$$G(X) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i) X_i. \tag{14}$$

Com base nesta nova expressão para o índice de Gini, será deduzida uma fórmula que retorne o impacto de uma transferência de renda. Sejam $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ e $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$, respectivamente, o vetor inicial e o vetor após a trasnferência (i, j, k); seja $D = X - Z$ um vetor que chamaremos de "vetor diferença". O vetor D registra o quanto cada elemento da população ou amostra deve dar ou receber durante o processo; assim, se definirmos o i-ésimo elemento de D (D_i) como o saldo da i-ésima pessoa, torna-se evidente que pessoas com saldo positivo (isto é, $D_i > 0$) devem ceder a quantia registrada no vetor e pessoas com saldo negativo devem receber o respectivo valor.
Pela definição de impacto, $\lambda = G(Z) - G(X)$. Assim, aplicando a definição:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i) Z_i - 1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i) x_i; \tag{15}$$

$$\lambda = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i) X_i - (n - i) Z_i; \tag{16}$$

$$\lambda = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i)(X_i - Z_i). \tag{17}$$

$D_i = X_i - Z_i$. Portanto:

$$\lambda = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i) D_i. \tag{18}$$

Isto é, por meio desta expressão é possível medir o impacto de uma transferência de renda no índice de Gini.

O resultado desta seção leva à seguinte proposição:

Proposição 1: *Seja* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *um vetor com rendas; sejam* $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ *o vetor* X *após a transferência* (i, j, k) *e* $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ *o vetor* Y *ordenado. Seja* D_i *o i-ésimo elemento do vetor* $D = Z - X$*. Portanto, o impacto associado a transferência* (i, j, k) *no vetor* X *é:*

$$\lambda = \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^{n} (n - i) D_i. \tag{19}$$

3 Referências

DE CARVALHO, Rhayza Aves Figueiredo; DE CARVALHO, Abner Vilhena; DOS SANTOS, Ricardo Bruno Nascimento. Contribuição ao estudo da desigualdade de renda: uma análise comparativa da decomposição do índice de Gini para o Brasil e regiões nos anos de 2004 e 2012. Cadernos CEPEC, v. 6, n. 1-6, 2019.

DE SOUZA, Jorge; PEÑALOZA, Rodrigo AS. Teoria Dual das Medidas de Concentração. Estatística Exploratória, 2006.

GASTWIRTH, Joseph L. Is the Gini index of inequality overly sensitive to changes in the middle of the income distribution?. Statistics and Public Policy, v. 4, n. 1, p. 1-11, 2017.

GIORGI, Giovanni Maria; GIGLIARANO, Chiara. The Gini concentration index: a review of the inference literature. Journal of Economic Surveys, v. 31, n. 4, p. 1130-1148, 2017.

HOFFMANN, Rodolfo. Distribuição de renda: medidas de desigualdade e pobreza. Editora USP. 1998.

HOFFMANN, Rodolfo. O índice de Atkinson e a sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas. Brazilian Review of Econometrics, v. 14, n. 2, p. 159-176, 1994.

HOFFMANN, Rodolfo. Sensibilidade das medidas de desigualdade a transferências regressivas. Pesquisa e Planejamento Econômico (PPE), V. 2. 1992.

IZSÁK, J.; PAPP, L. Sensitivity of diversity indices: a study of dipterous assemblages. Community Ecology, v. 3, n. 1, p. 79-86, 2002.