



Violação de desigualdades de Bell através do método de aproximação estocástica de perturbação simultânea

Mateus Aparecido Rodrigues | Prof. Dr. Rafael Luiz da Silva Rabelo*

Departamento de Física da Matéria Condensada | Instituto de Física “Gleb Wataghin”

Introdução

Um dos resultados mais contra-intuitivos da teoria quântica é conhecido como não-localidade de Bell ou, simplesmente, não-localidade. A não-localidade, proposta por John Bell [1], físico norte-irlandês, diz respeito a fortes correlações entre partes de um sistema quântico que não podem ser modeladas por nenhuma teoria local ou teoria de variáveis ocultas locais.

A não-localidade é evidenciada por meio de violações de desigualdades de Bell. Apenas sistemas quânticos que apresentam uma propriedade conhecida como emaranhamento, são capazes de violar desigualdades de Bell. As desigualdades de Bell são importantes para o desenvolvimento de protocolos de comunicação [2] e na avaliação de emaranhamento multipartido [3]. Além disso, são fundamentais em alguns protocolos de distribuição quântica de chaves criptográficas [4]. Apesar disso, obter violações máximas de desigualdades de Bell (VMDB) para sistemas multipartidos através de métodos numéricos tradicionais como o método ergódico ou de amostragem de Monte Carlo é algo impraticável tanto em vista o custo computacional exponencial de armazenamento de dados e de pós-processamento [5].

Neste trabalho, foi implementado o método de aproximação estocástica de perturbação simultânea (AEPS) aplicado a VMDB de sistemas de dois e três q-bits. O método mostrou-se robusto e factível mesmo em problemas de maiores dimensões como no caso de três q-bits.

Estados quânticos e emaranhamento

A todo sistema quântico estão associados um espaço de Hilbert \mathcal{H}^d e um operador densidade e esse por sua vez descreve

o estado do sistema. Operadores densidade são combinações convexas de projetores unidimensionais $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, que têm a seguinte forma:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i$$

onde $\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$ e $|\langle\psi_i|\psi_i\rangle| = 1$ para todo i . Estados quânticos podem ser divididos entre estados puros e mistos. Se o estado de um sistema for descrito por um único projetor, o estado é dito puro. Se o estado do sistema for descrito por combinações de dois ou mais projetores, o estado é dito misto.

Sistemas quânticos compostos são também descritos por operadores densidade, se o estado do sistema não puder ser descrito como o produto tensorial dos operadores densidade de cada uma das partes que compõem o sistema, então o estado é dito emaranhado, caso contrário o estado é dito separável.

Desigualdades de Bell e não-localidade

As desigualdades de Bell são construídas a partir das probabilidades conjuntas de se obter resultados condicionados às medições em dado experimento. Para sistemas que admitem modelagens locais ou de variáveis ocultas locais, as desigualdades de Bell são sempre satisfeitas e esses sistemas são ditos locais. Caso o sistema não admita tais modelagens, a desigualdade de Bell desse sistema é violada o que implica que as correlações entre as partes do sistema são não-locais e portanto o sistema apresenta não-localidade. Apenas estados quânticos emaranhados são capazes de violar desigualdades de Bell.

Para o estudo de sistemas bipartidos, foi utilizada a mais famosa das desigualdades de Bell, a desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) que é definida em um cenário onde duas partes, usualmente denominados por Alice e Bob,

compartilham em sistema quântico e podem escolher dentre duas medições dicotômicas, a desigualdade CHSH tem a seguinte forma:

$$E(0,0) + E(0,1) + E(1,0) - E(1,1) \leq 2$$

onde $E(x,y) = p(0,0|x,y) + p(1,1|x,y) - p(0,1|x,y) - p(1,0|x,y)$. Já para o estudo de sistemas tripartidos foi utilizada a desigualdade de Mermin que é definida em um cenário onde Alice, Bob e Charlie compartilham um sistema quântico onde cada parte pode executar um conjunto de duas diferentes medições dicotômicas, a desigualdade de Mermin tem a seguinte forma:

$$E(0,0,0) - E(0,1,1) - E(1,0,1) - E(1,1,0) \leq 2$$

onde $E(x,y,z) = \sum_{a,b,c \in \{\pm 1\}} (abc)p(a,b,c|x,y,z)$. As probabilidades conjuntas são calculados por meio da regra de Born, para sistemas bipartidos:

$$p(a,b|x,y) = \text{Tr}[\rho(A_{a|x} \otimes B_{b|y})]$$

e para sistemas tripartidos:

$$p(a,b,c|x,y,z) = \text{Tr}[\rho(A_{a|x} \otimes B_{b|y} \otimes C_{c|z})]$$

onde ρ é o operador densidade que descreve o sistema, $A_{a|x}$, $B_{b|y}$ e $C_{c|z}$ são os operadores medição associados aos resultados a , b e c dadas as medições x , y e z , respectivamente. Para estados quânticos e medições adequadamente escolhidos, é possível violar a desigualdade CHSH até o valor de $2\sqrt{2}$ e a desigualdade de Mermin até o valor de 4.

Aproximação estocástica de perturbação simultânea

Definidos o estado quântico e a desigualdade de Bell pode-se parametrizar um operador de Bell \mathcal{B} , operador das medições, por um conjunto de parâmetros Θ e então o processo de encontrar MVDB se torna um otimização, de maximização de uma função paramétrica que tem a seguinte forma:

$$V(\Theta) = \text{Tr}[\rho\mathcal{B}(\Theta)]$$

O AEPS é um método iterativo, introduziremos um conjunto de parâmetros iniciais Θ_0 e denotaremos o conjunto de parâmetros no passo k por Θ_k . Um vetor p -dimensional de perturbação aleatória $\Delta_k = [\Delta_{k1}, \dots, \Delta_{kp}]^T$ é criado a cada iteração, cada elemento do vetor Δ_k é escolhido aleatoriamente dentre os elementos da distribuição $\{-1, 1\}$ e p diz respeito à quantidade de variáveis do problema de otimização. Então, a aproximação estocástica do gradiente tem a seguinte forma:

$$g_k(\Theta_k) = \frac{V(\Theta_k + c_k\Delta_k) - V(\Theta_k - c_k\Delta_k)}{2c_k} [\Delta_{k1}^{-1}, \dots, \Delta_{kp}^{-1}]^T$$

e o conjunto de parâmetros Θ_k é atualizado para:

$$\Theta_{k+1} = \Theta_k + a_k g_k(\Theta_k)$$

onde $c_k = [c/(k+1)^\gamma]$ e $a_k = [a/(k+1+A)^\alpha]$ controlam o tamanho do gradiente e do passo entre as iterações, respectivamente. As constantes $A \geq 0$, $a > 0$ e $c > 0$ são escolhidas empiricamente de acordo com o problema de otimização. O valor médio final do operador de Bell é dado por $V(\Theta_N)$, para um número desejado de iterações N . Este valor é uma cota inferior para a violação máxima da desigualdade de Bell em questão.

Resultados

Primeiramente, o método AEPS foi aplicado ao estudo da desigualdade CHSH para um estado quântico puro maximamente emaranhado e para dois estados quânticos mistos parcialmente emaranhados. Como estado puro foi escolhido um dos estados de Bell $|\phi^+\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, onde seu respectivo operador densidade é dado por $\rho_{\phi^+} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$. Já como estados quânticos mistos parcialmente emaranhados foram escolhidos os estados de Werner, que são da seguinte forma:

$$\rho_W = W |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (W-1)\frac{\mathbb{1}_4}{4}, W \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$$

para $0.7056 < W \leq 1$, garantindo assim que os estados sejam emaranhados. Os parâmetros iniciais utilizados foram $A = 0$, $a = 2.1$, $c = 0.01$, $\alpha = 1$ e $\gamma = 2$ e o operador de Bell foi parametrizado por oito variáveis. Como evidenciado na Fig. 1, foi possível alcançar valores extremamente próximos dos valores teóricos.

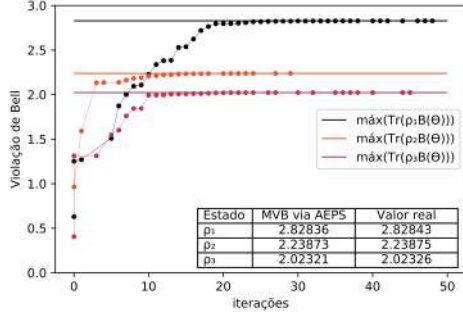


Figura 1: Aplicação do método AEPS em um cenário CHSH para um estado quântico puro maximamente emaranhado ρ_1 e dois estados quânticos mistos parcialmente emaranhados, estados de Werner ρ_2 ($W = 0.7915$) e ρ_3 ($W = 0.7153$)

Após o estudo do AEPS aplicado a desigualdade CHSH, foi estudada a desigualdade de Mermin também utilizando um estado puro maximamente emaranhado e dois estados mistos parcialmente emaranhados. Como estado puro maximamente emaranhado, foi escolhido o estado Greenberger-Horne-Zeilinger $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$, cujo operador densidade associado é dado por $\rho_{GHZ} = |GHZ\rangle\langle GHZ|$. Como estados mistos, foram escolhidos os estados de Werner para sistemas tripartidos e esses por sua vez são descritos pelo seguinte operador densidade:

$$\rho_W = W |GHZ\rangle\langle GHZ| + (W - 1) \frac{\mathbb{1}_8}{8}$$

com $0.7056 < W \leq 1$. Foi possível manter o número de iterações constante, mesmo para um problema de maior dimensão, utilizando $c = 0.7$ e mantendo todos os outros parâmetros iniciais iguais aos aplicados a desigualdade CHSH. Como mostrado na Fig. 2, foi possível obter valores extremamente próximos dos valores teóricos.

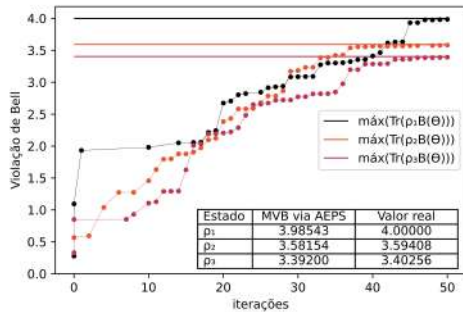


Figura 2: Aplicação do método AEPS em um cenário de Mermin para um estado quântico puro maximamente emaranhado ρ_1 e dois estados quânticos mistos parcialmente emaranhados, estados de Werner ρ_2 ($W = 0.8985$) e ρ_3 ($W = 0.8506$).

Com o intuito de estudar as convergências estatisticamente, o método AEPS foi aplicado com vezes para a desigualdade CHSH e com vezes para a desigualdade de Mermin. Em ambas as aplicações foram utilizados estados puros e $k_{máx} = 50$. Foram coletados apenas os resultados que correspondiam a uma acurácia de no mínimo 95%. Para a desigualdade CHSH foram detectadas convergências para 63%, como mostrado na Fig. 3 e o tempo médio por aplicação foi $t_{m_{CHSH}} = 0.20s$.

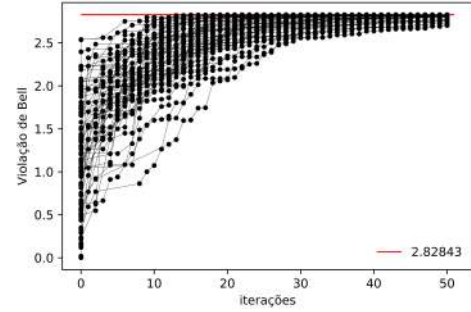


Figura 3: 63 execuções bem-sucedidas do método AEPS em um total de 100 execuções, partindo de pontos diferentes, em um cenário CHSH para o estado quântico puro maximamente emaranhado $\rho_{\phi^+} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$.

Já para a desigualdade de Mermin foram detectadas convergências cerca de 41% das vezes, como mostrado na Fig. 4, com um tempo médio por aplicação $t_{m_{Mermin}} = 0.27s$.

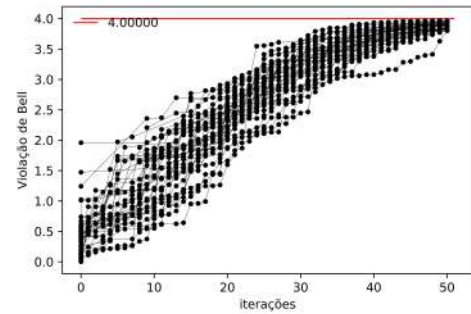


Figura 4: 41 execuções bem-sucedidas do método AEPS em um total de 100 execuções, partindo de pontos diferentes, em um cenário de Mermin para o estado quântico puro maximamente emaranhado $\rho_{GHZ} = |GHZ\rangle\langle GHZ|$.

O critério de convergência adotado foi:

$$\epsilon_{k-1} < 10^{-5}$$

onde ϵ_{k-1} representa a diferença entre o valor da desigualdade na iteração k e na iteração $k - 1$ para $k \geq 2$.

Conclusões e perspectivas

A partir desta pesquisa foi possível estudar profundamente o método AEPS e aplica-lo a VMDB de sistemas bipartidos e tripartidos. O método mostrou-se eficiente mesmo quando aplicado a problemas de maiores dimensões como nos casos tripartidos. Foi possível, em um tempo médio de execução relativamente baixo, atingir boas cotas inferiores para VMDB em todos os casos estudados.

Os resultados obtidos nesse trabalho motivaram o desenvolvimento de um outro projeto de iniciação científica, fomentado pelo CNPq na quota 2020-2021, que visa estudar a violação máxima de desigualdades de Bell de outros cenários utilizando o AEPS.

Referências

[1] J. S. Bell. "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox". *Physics* **1**, 195 (1964).

- [2] V. Scarani and N. Gisin. "Quantum Communication between N Partners and Bell's Inequalities" *Phys. Rev. A* **87**, 117901 (2001).
- [3] N. Brunner, J. Sharam, and T. Vértesi, "Testing the Structure of Multipartite Entanglement with Bell Inequalities" *Phys. Rev. Lett.* **108**, 110501 (2012).
- [4] V. Scarani and N. Gisin. "Quantum key distribution between N partners: Optimal eavesdropping and Bell's inequalities" *Phys. Rev. A* **65**, 012311 (2001).
- [5] L.-K. Yang, G. Chen, W.-H. Zhang, X.-X. Peng, S. Yu, C.-F. Li, G.-C. Guo. "Self-guided method to search maximal Bell violations for unknown quantum states". *Phys. Rev. A* **96**, 052310 (2017).