XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

Análise e Projeto de Sistemas Chaveados

Gabriel S. Ramirez Matheus Souza

UNICAMP - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Palavras-Chave: Sistemas Chaveados, Sistemas Tipo Lure, Tempos Mínimos de Permanência

1 Introdução

1.1 Sistemas Chaveados

Sistemas chaveados constituem uma classe particular de sistemas dinâmicos variantes no tempo, os quais são, em geral, compostos por uma família de subsistemas sujeitos a uma regra que define o chaveamento entre estes. O estudo deste tipo de sistema apresenta relevância tanto teórica, quanto prática, uma vez que sua utilidade pode ser notada na investigação, análise e modelagem de sistemas extremamente complexos. Dentre os quais podemos destacar, sistemas sujeitos a variações abruptas de parâmetros (conhecidos ou desconhecidos), sistemas que podem apresentar mudanças significativas em sua estrutura devido às razões mais diversas, ou mesmo sistemas que apresentam uma arquitetura composta por múltiplos controladores [1].

Neste projeto de pesquisa tivemos particular interesse no estudo da estabilidade de sistemas chaveados lineares, que podem ser representados matematicamente de forma geral como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t). \end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao vetor de estado do sistema, $y \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de entrada e saída associados a este e $\sigma : [0, \infty) \to \mathbb{K} := \{1, \ldots, N\}$ é a **função de comutação** do sistema.

No que diz respeito ao estudo de sistemas chaveados, um dos problemas de maior interesse se dá com relação ao projeto da função de chaveamento σ do sistema (também chamada de chave, regra de chaveamento ou função de comutação do sistema), a depender de como escolhemos esta, podemos ser capazes de conferir ao sistema em questão características como estabilidade (mesmo em casos nos quais o sistema como um todo é composto por subsistemas instáveis) e o atendimento a alguns critérios de desempenho por parte deste.

1.2 Tempos Mínimos de Permanência

Quando lidamos com sistemas reais e aplicações práticas que podem ser modeladas por sistemas chaveados, uma restrição comum que costuma surgir é a de que, dado que a função de comutação tenha chaveado para um determinado subsistema em um certo instante específico, esta deve permanecer neste por pelo menos um intervalo mínimo de tempo antes de comutar para um próximo subsistema. Este intervalo de tempo, em geral, é característico de cada subsistema e é denominado **tempo mínimo de permanência** deste. Matematicamente temos que, se num dado instante de tempo t_k a função de chaveamento tem valor dado por $\sigma(t_k) = i$, então, devemos ter que $t_{k+1} - t_k \geq \tau_i$, onde t_{k+1} corresponde ao próximo instante de chaveamento do sistema e τ_i é o tempo mínimo de permanência associado ao i-ésimo subsistema do sistema chaveado em consideração. Sendo assim, é de grande interesse que ao projetarmos funções de comutação para sistemas chaveados, estas levem em consideração os tempos mínimos de permanência associados a cada um dos subsistemas em seu design. Um exemplo de chave que atende às restrições aqui discutidas e um melhor desenvolvimento do assunto podem ser encontrado em [2].

1.3 Sistemas Tipo Lur'e

Dinâmicas não-lineares surgem de forma quase onipresente na modelagem de uma infinidade de fenômenos naturais e sistemas físicos. Sendo assim, o estudo e o entendimento de sistemas dinâmicos não-lineares é de extremo interesse dentro das áreas mais diversas, dentre as quais podemos destacar as ciências naturais e as engenharias em geral, no entanto. Uma subclasse de sistemas não-lineares na qual tivemos especial interesse, e que foi um dos focos de nosso estudo nesse projeto é a subclasse dos sistemas não-lineares **tipo Lure**, os quais são definidos matematicamente segundo as seguintes equações

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ w(t) = -\phi(y(t)) \end{cases} \tag{1.1}$$

onde a entrada $w(t)$ do sistema consiste em um função não-linear $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(0) = 0$. Além disso, $\phi(\cdot)$ deve obedecer à restrição $(\phi(y) - \kappa y)\phi(y) \leq 0$, com κ real e positivo, neste caso, dizemos que $\phi(\cdot)$ pertence ao setor $[0, \kappa]$. Note que sistemas dessa natureza podem ser caracterizados como um sistema em malha fechada, que possui uma parte linear e uma realimentação de saída não-linear. Uma das características que destacam esta classe de sistemas sobre as demais é o fato de que existem critérios de estabilidade bem estabelecidos e estudados para esta, os quais se baseiam na resposta frequencial exibida por este tipo de sistema (e os torna ainda mais interessante sob o ponto de vista prático). São eles, o **critério de Popov** e o **critério do círculo** [3]. Outro ponto que vale a pena destacar a respeito da utilidade destes sistemas diz respeito ao tipo de não-linearidade associada a estes. Não-linearidades do tipo setor incluem alguns dos tipos de comportamento não-linear que surgem de forma mais predominante em aplicações práticas, tais como saturações, zonas mortas e quantizações.

1.4 Sistemas Chaveados Tipo Lur'e

Neste projeto de pesquisa, nosso principal objeto de estudo foram sistemas dinâmicos que podem ser descritos matematicamente pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \\ u(t) &= -\phi_{\sigma(t)}(y(t)), \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ corresponde ao vetor de estados do sistema, $y \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^m$ são respectivamente os vetores de entrada e saída associados a este para $t \in [t_0, \infty)$, $\sigma : [t_0, \infty) \to \mathbb{K} := \{1, \ldots, N\}$ é uma função geralmente constante por partes e define a regra de comutação do sistema, responsável por selecionar um dentre N subsistemas (ou modos) do conjunto $\mathbb{K} := \{1, \ldots, N\}$, cada qual caracterizado quanto à sua realização de estados por um conjunto de matrizes reais $\{A_i, B_i, C_i, D_i\}$, com $i \in \mathbb{K}$. A função $\phi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, em geral, assume a forma $\phi_i(\mu) = [\phi_{i1}(\mu_1), \ldots, \phi_{iN}(\mu_N)]'$ e pertence ao setor $[0, \kappa]$ para $\kappa \in \mathbb{R}$, ou seja, vale que $(\phi_{ij}(\mu_j) - \kappa\mu_j)\phi_{ij}(\mu_j) \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e $\mu_j \in \mathbb{R}$. A partir da condição de setor sobre a função $\phi_i(\cdot)$, com $i \in \mathbb{K}$ podemos verificar que a desigualdade $(\phi_i(\mu) - \kappa\mu)'\phi_i(\mu) \leq 0$ é válida para todo $\mu \in \mathbb{R}^m$, o que consequentemente nos permite concluir que $\phi_i(0) = 0,\ \forall i \in \mathbb{K}$. Além disso, consideramos que, dado um certo $x \in \mathbb{R}^n$, a equação $y(t) = C_i x(t) - D_i\phi_i(y(t))$ tem solução única para todo $i \in \mathbb{K}$, o que em conjunção com o fato de que $\phi_i(0) = 0$ nos permite concluir que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio para o sistema (1.2). Note que, o sistema apresentado em (1.2) pode ser vistos como um sistema chaveado no qual cada um de seus subsistemas consiste em um sistema não-linear tipo Lur'e como o descrito em (1.1).

Para sistemas da forma (1.2) nos quais há apenas uma não-linearidade $\phi(\cdot)$ (em detrimento de uma não-linearidade por subsistema $\phi_i(\cdot)$ como apresentado em (1.2)), [4] apresenta um possível projeto de regra de comutação e um conjunto de condições sobre o sistema que, juntos, são capazes de garantir estabilidade assintótica para este quando não levamos em consideração a existência de restrições do tipo tempo mínimo de permanência, como discutido na subseção (1.2). Neste projeto, nosso principal objetivo consistiu em conceber uma regra de comutação que respeite restrições do tipo tempo mínimo de permanência e condições sobre um sistema da forma (1.2) que, em conjunto, sejam capazes de garantir estabilidade assintótica para este.

2 Resultados Principais

Nesta seção, apresentaremos uma função de chaveamento e um conjunto de condições específicas sobre um sistema da forma (1.2) que, em conjunto, são capazes de garantir que a origem deste sistema seja assintoticamente globalmente estável. Para tal, começaremos realizando algumas definições. Seja $i \in \mathbb{K} = \{1, \ldots, N\}$ e τ_i o tempo mínimo de permanência associada ao i-ésimo subsistema de (1.2), definiremos o seguinte conjunto

$$u(x, i) = \{j \in \mathbb{K} : x'P_j(0)x \leq x'P_i(\tau_i)x\}, \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $P_l : [0, \infty) \to \mathbb{S}^n_+$ (onde $\mathbb{S}^n_+$ representa o conjunto das matrizes simétricas reais de dimensão $n \times n$ definidas positivas) para $l \in \mathbb{K}$. Basicamente (2.1) define um conjunto de candidatos a próximo subsistema a ser selecionado por nossa função de chaveamento, e depende do valor assumido pelo vetor de estado x e do modo selecionado i no sistema em um dado instante de tempo. Além disso, visando atender às restrições de tempo mínimo de permanência, seja t_k o último instante de tempo no qual ocorreu chaveamento (ou seja, no qual um novo subsistema do sistema (1.2) foi selecionado pela chave) e seja $\sigma_k := \sigma(t_k)$ o índice do subsistema escolhido, o próximo instante de chaveamento t_{k+1} em (1.2) será dado por

$$\begin{aligned} t_{k+1} := \inf_{t \geq t_k + \tau_k} \{ & t : \exists\, j \in \mathbb{K},\ j \neq \sigma_k \\ & :\ x(t)'P_j(0)x(t) \leq x(t)'P_{\sigma_k}(\tau_k)x(t)\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ou seja, trata-se do primeiro instante de tempo posterior a t_k no qual o conjunto $u(x(t), \sigma_k)$ se encontra não-vazio e a restrição de tempo mínimo de permanência associada ao modo σ_k de (1.2) foi satisfeita.

Realizadas estas definições, seja $\sigma_0 = \sigma(t_0)$ o valor inicial da chave no sistema (1.2), podemos enfim definir nossa função de chaveamento. Para o intervalo de tempo $[t_k, t_{k+1}]$ definiremos que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \sigma(t_k) \quad \text{para} \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \\ \sigma(t_{k+1}) \in u(x(t_{k+1}), \sigma(t_k)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dessa definição, vemos que a chave descrita por (2.3) é uma função que assume um valor constante ao longo de todo intervalo $[t_k, t_{k+1})$ entre dois chaveamentos consecutivos e que este intervalo tem um tamanho mínimo de tal modo que as restrições de tempos mínimos de permanência são satisfeitas para cada um dos subsistemas que compõe (1.2).

Por fim, exibiremos o principal teorema desenvolvido ao longo deste projeto, o qual visa estabelecer condições suficiente para que um sistema da forma (1.2) sujeito a uma regra de comutação como a definida por (2.2)-(2.3) seja assintoticamente globalmente estável em sua origem.

Teorema 2.1. *Seja S um sistema da forma (1.2) e $\{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ com $\tau_i > 0, \forall i \in \mathbb{K}$ o conjunto dos tempos mínimos de permanência associados aos modos de S, se existir uma família de matrizes variantes no tempo definidas por $P_i : [0, \infty) \to \mathbb{S}^n_+$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e um conjunto de escalares reais $\lambda_{ij} > 0, \forall i, j \in \mathbb{K}$ que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_i(t) + A_i' P_i(t) + P_i(t) A_i & P_i(t) B_i - C_{\kappa i}' \\ \bullet & -D_{\kappa i}' - D_{\kappa i} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.4}$$

para todo $t \in [0, \tau_i)$ e para todo $i \in \mathbb{K}$ e também satisfaçam

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i & P_i(\tau_i) B_i - C_{\kappa i}' \\ \bullet & -D_{\kappa i}' - D_{\kappa i} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.5}$$

$$\Gamma_i = A_i' P_i(\tau_i) + P_i(\tau_i) A_i + \sum_{j \in \mathbb{K}, j \neq i} \lambda_{ij} (P_j(0) - P_i(\tau_i)) \tag{2.6}$$

para todo $i \in \mathbb{K}$ com $C_{\kappa i} = \kappa C_i$ e $D_{\kappa i} = I + \kappa D_i$, então a função de chaveamento definida por (2.2)-(2.3) garante que S é globalmente assintoticamente estável.

2.1 Exemplo

A seguir, apresentamos os resultados de uma simulação realizada em um sistema chaveado do tipo Lur' de dimensão 2 para fins de validação na qual empregamos o critério de chaveamento definido por (2.2)-(2.3). Para esta simulação, utilizamos de um sistema chaveado composto pelos seguintes subsistemas, cada qual com um tempo mínimo de permanência pré-definido

Subsistema 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}, \ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ D_1 = 0, \ \tau_1 = 0.1$$

Subsistema 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ D_2 = 0, \ \tau_2 = 0.1$$

As não-linearidades utilizadas para cada subsistema consistiram em duas saturações, sendo uma limitada entre -1 e 1 para o modo 1 e a outra limitada entre -5 e 5 para o modo 2. Para esta simulação, utilizamos $\kappa = 10$, $\sigma_0 = 1$ como valor inicial da chave do sistema, $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$ como estado inicial deste. Além disso, encontramos os seguintes valores para os escalares λ_{ij} exigidos pelo teorema: $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{12} = 100$, $\lambda_{21} = 50$ e $\lambda_{22} = 0$. As matrizes $P_i(t)$ exigidas pelo teorema foram encontradas, assim como os escalares λ_{ij}, por meio da resolução de problemas de otimização com o auxílio de pacotes computacionais. Abaixo se encontra a evolução temporal dos estados do sistema obtida por meio da simulação.

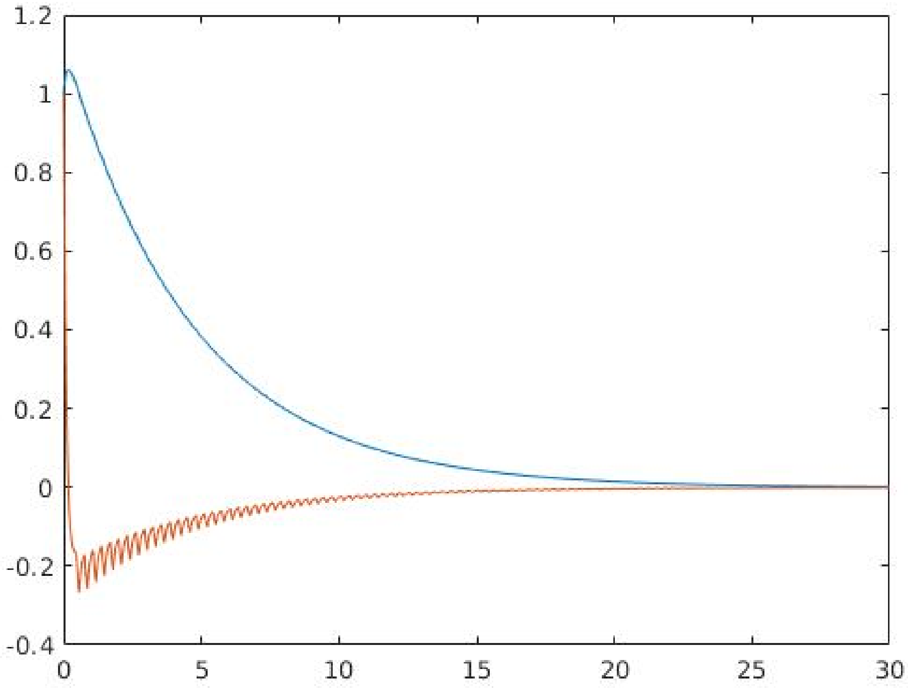

Figura 1: Evolução temporal dos estados do sistema

Referências

[1] Z. Sun and S. S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer-Verlag, 2005.

[2] M. Souza, A. R. Fioravanti, M. Corless, and R. N. Shorten, "Switching controller design with dwell-times and sampling," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 11, 2017.

[3] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.

[4] J. C. Geromel and G. S.Deacto, "Stability analysis of lur'e-type switched systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 11, 2014.