Equações Diferenciais Estocásticas e Precificação de Derivativos

Nicholas Salgado Soria* (PIBIC voluntário) e Luiz K. Hotta* (Orientador), * IMECC

1 Introdução

O projeto tem como tema o mercado financeiro (HULL, 2017), com foco em opções e derivativos e a utilização de simulação na precificação de opções. Os principais temas estudados foram: produtos que envolvem opções, precificações de opções (HULL, 2017), equações diferenciais estocásticas (MIKOSCH, 1998), fórmula de Black e Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973; MIKOSCH, 1998), precificação de opções utilizando simulação de Monte Carlo com volatilidade constante e variável (COX; ROSS; RUBINSTEIN, 1979), e discussão de algumas técnicas para otimização da simulação (SILVA, 2012).

O restante do trabalho se dá na seguinte ordem. A seção 2 apresenta a definição de opções de compra e venda, derivativo objeto do projeto. A seção 3 apresenta os processos de difusão que são utilizados para simular trajetórias de preços de ativos e a seção 4 apresenta a fórmula de Black e Scholes. A seção 5 apresenta como as simulações podem ser utilizadas na precificação de opções, enquanto a seção 6 apresenta os comentários finais.

2 Opções

O mercado de derivativos proporciona aos agentes econômicos oportunidades para gerenciar, mitigar riscos e livrarem-se daqueles que considerem indesejáveis. São instrumentos que ao mesmo tempo são poderosos e perigosos, e como tal é necessário conhecê-los a fundo, sendo a precificação uma parte importante na sua compreensão (HULL, 2017)

Derivativo é um contrato cujo valor futuro depende do preço de um ativo, por exemplo, de ações, moedas, índices, etc. Um exemplo de derivativo são as opções de venda ou compra. As opções dão o direito de comprar (vender), mas não a obrigação de comprar (vender) o ativo do contrato, em uma data futura (na data ou até a data de vencimento da opção), por um preço pré-estabelecido, o preço de exercício da opção. As opções mais tradicionais são: opção Americana que pode ser exercida em qualquer momento até sua data de expiração, e a opção europeia que pode ser exercida apenas na data de expiração, chamada de tempo de exercício.

A precificação da opção, dada pelo cálculo do prêmio de risco, é o preço a ser pago pelo comprador para ter o direito de comprar (vender) um ativo pelo preço de exercício em uma opção de compra (venda). O valor intrínseco de uma opção é valor presente do lucro. No caso de uma opção de compra europeia, desconsiderando custos, o lucro é dado por Lucro $= \max(S_T - K, 0)$, em que S_T é o preço da ação no tempo de exercício T e K é o preço de exercício.

3 Processos de difusão

Muitas vezes considera-se que o preço de um ativo, ou de uma transformação do preço, segue uma equação diferencial estocástica. Por exemplo, quando o preço X_t segue um movimento browniano geométrico (GBM), o preço é dado pela equação:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{1}$$

em que $t > 0$, $\mu S(t)$ e $\sigma S(t)$ representam, respectivamente, a tendência (*drift*) e difusão (*diffusion*) instantâneas, σ é a volatilidade e $W(t)$ segue um movimento browniano padrão. Existem vários processos de difusão sugeridas na literatura para modelar diferentes ativos, por exemplo, moedas, preços de ações, etc.

Defina uma variável de interesse, y_t, que seja função do preço do ativo, i.e., $y(t) = F(X, t)$, para alguma função F. Então o processo $y(t)$ satisfaz a equação de Itô:

$$dy(t) = (\frac{\partial F}{\partial x}\mu + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sigma^2)dt + \frac{\partial F}{\partial x}\sigma dW(t). \tag{2}$$

Esta equação é utilizada para precificação de uma opção, cujo lucro é função do preço de um ativo (CHAN; WONG, 2015). Por exemplo, em uma opção europeia de compra, com preço de exercício K no tempo tempo de exercício T, o lucro do comprador da opção de compra, no tempo atual, descontado a taxa livre de retorno, é dado por

$$\text{Lucro}(S_T, K, p_o) = [\max(S_T - K, 0)]e^{-rT} - p_o, \tag{3}$$

em que p_o é o preço da opção e r a taxa livre de retorno. No tempo 0 de compra da opção, a ação tem preço S_0 e o preço da ação varia conforme uma equação de difusão adequada, ou seja, o lucro é função de uma equação diferencial estocástica.

4 Fórmula de Black e Scholes

Black e Scholes (1973) desenvolveram uma fórmula explícita para precificar opções, i.e. sob algumas suposições é possível calcular o valor teórico de uma opção europeia. Quando algumas das suposições não são adotadas, não existe uma forma fechada para o preço da opção. Mesmo no caso em que estas suposições são válidas, no caso simples da opção americana, não existe uma forma fechada. Com isso já percebemos certas limitações do modelo, por não termos uma forma fechada para o seu cálculo; daí a importância do uso de simulação.

Para alguns modelos de difusão existem formas analíticas para o preço de certa opções. Por exemplo, no caso em que o preço segue um GBM dado pela Equação (1), temos uma solução fechada dada por:

$$X(t) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\omega_t\right\}, \tag{4}$$

em que S_0 é o preço no tempo $t = 0$. Como a parte interna da exponencial tem distribuição normal $N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$, temos que o preço tem distribuição log-normal. Utilizando este fato, Black e Scholes (1973) derivou a forma analítica do preço de uma opção europeia, mas tarde generalizada por Merton (1973) para incluir dividendos. O preço é dado por:

$$\begin{array}{c} C(S,T,K) = S\Phi(d_1) - K\exp^{-rT}\Phi(d_2), \qquad \text{em que} \\ d_1 = \frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \end{array} \tag{5}$$

em que $C(S,T,K)$ é o preço da opção europeia de compra, S o preço atual do ativo, K o preço de exercício, σ a volatilidade, r a taxa de juros de aplicação livre de risco, T o tempo até o exercício e $\Phi(.)$ a função distribuição normal padrão (HULL, 2017, Sec 15.).

5 Simulações

Neste método os preços futuros do ativo são simulados até o vencimento da opção através de simulação Monte Carlo para termos uma estimativa da distribuição dos preços e lucros. Para verificar o desempenho das simulações vamos considerar um caso em que conhecemos o valor real da opção; no caso, o dado pela fórmula de Black e Scholes na equação (5). Os valores utilizados na simulação são semelhantes a uma das opções de compra europeia da companhia Petrobras, *PETRD267*, no dia 22/19/04/2020. Foram considerados os seguintes valores: Taxa de juros livre de risco do país de referência dada pela taxa DI de *3*%; preço inicial do ativo: R\$18, 67; tempo de maturidade da opção: 1 ano; preço de exercício: R\$26, 72; volatilidade dada pela volatilidade implícita anualizada, 0, 4037; preço dado pela fórmula de Black e Scholes: R\$1, 030.

Nas simulações consideramos número de divisões ($ndivd$) e de trajetórias iguais a 100, 1.000 e 10.000. Para cada combinação foram realizadas $nreplic = 10.000$ replicações. Para cada combinação de $ndivd$ e $npath$, na j-ésima replicação temos os seguintes passos:

Passo 1: Simule $x_{i,j}$, o preço da ação no tempo exercício T na i-ésima trajetória na j-ésima replicação, $i = 1, \ldots, npath$, $j = 1, \ldots, nreplic$.
Passo 2: Calcule o valor recebido no tempo T, ajustado ao tempo 0 pela taxa de juro livre de risco através de: $l_{i,j} = [\max(x_{i,j} - K, 0)]e^{-rT}$.
Passo 3: Estime a esperança através da média dada por $pr_j = npath^{-1}\sum_{i=1}^{npath} l_{i,j}$ a estimativa pontual do preço da opção estimada na j-ésima replicação.
Passo 4: Calcule $(pr_j \pm 1,96\ sd_j/\sqrt{npath})$ o intervalo de confiança 95% da estimativa da opção na j-ésima replicação, em que sd_j é o desvio padrão amostral do conjunto de valores $\{l_{i,j},\ i = 1, \ldots, npath\}$.

Repita os passos 1 a 4 $nreplic$ vezes e vá para os passos seguintes:

Passo 5: Calcule a média e desvio padrão do conjunto de valores $\{pr_j,\ j = 1, ..., nreplic\}$.

Passo 6: Verifique a percentagem de casos em que os intervalos construídos no Passo 4 contém o valor verdadeiro $1,03$.

Passo 7: Calcule a largura média dos intervalos de confiança construídos no Passo 4, i.e., igual a $(nreplic)^{-1}\sum_{j=1}^{nreplic} 3,92\ sd_j/\sqrt{npath}$.

Passo 8: Calcule $(pr^{(0,025)},^{(0,975)})$, o intervalo que contém 95% das estimativas da opção nas 10.000 replicações. $pr^{(0,025)}$ e $pr^{(0,975)}$ são respectivamente os $2,5\%$ e $97,5\%$ percentis do conjunto de valores $\{pr_j,\ j = 1,\ldots, replic\}$.

Na simulação consideramos que os preços evoluem segundo o GBM dada pela equação (1). Há diversas fórmulas simular as trajetória. Será utilizada a maneira mais simples, a aproximação de *Euler* (MIKOSCH, 1998). Ela consiste em dividir o tempo até o vencimento da opção em intervalos pequenos. Por questão de simplicidade considere que o intervalo é de uma unidade, isto é, em $[0, 1]$ e que este intervalo é dividido em $ndiv$ intervalos regulares, de forma que a largura de cada intervalo de tempo é igual a $\Delta_t = 1/ndiv$. No GBM o drift e a volatilidade modificam continuamente, mas na aproximação considera-se que, dentro de cada intervalo $[k\Delta_t,(k + 1)\Delta_t]$ eles sejam constantes. Uma forma simples é que eles sejam iguais ao valor inicial no intervalo. Denotando o preço no tempo $k\Delta_t$ por $S_{[k]}$, os preços evoluem segundo

$$S_{[k+1]} = S_{[k]} + \mu S_{[k]}\Delta_t + \sigma' \sqrt{S_{[k]}\Delta_t} Z_{k+1}, \tag{6}$$

em que $Z_{k+1} \sim N(0, 1)$ e σ' a volatilidade no intervalo. A Tabela 1 apresenta um resumo dos resultados obtidos nas simulações. Como esperado, quanto maior o número de trajetórias e o número de divisões mais próximo chega-se do valor negociado da opção, menor é o intervalo de confiança, a média do intervalos de confiança se aproxima do valor do prêmio de mercado e a cobertura dos intervalos de confiança se aproximam do valor nominal de 95%. Com apenas 100 trajetórias a cobertura dos intervalos de confiança está bem longe do valor nominal, enquanto para 1.000 trajetórias já se aproxima bastante do valor nominal. Como esperado, a largura dos intervalos de confiança é inversamente proporcional ao número de trajetórias. Quanto ao número de divisões, para os valores utilizados, não houve muita diferença.

6 Comentários Finais

Apesar de apresentarem resultados significativos melhores, um maior número de trajetórias e de divisões, geram um custo computacional alto e demorado tempo de processamento das estimativas, devido ao número de replicações para obter uma melhor precisão. Algumas alternativas, que podem ser considerados futuramente para contornar esses problemas são: i) utilização a técnicas de redução de variância, por exemplo, aplicar variáveis antitéticas e variáveis controle (KLOEDEN; PLATEN, 2013, Cap. 16) e (CHAN; WONG, 2015, Cap 8); ii) uso de computação paralela, R com linguagem $C++$ gerando maior eficiência computacional (GILLESPIE; LOVELACE, 2016); iii) uso de algoritmos e aproximações mais eficientes para gerar as trajetórias (KLOEDEN; PLATEN, 2013, Partes IV e V).

Tabela 1: Medidas resumo dos preços estimados de uma opção europeia utilizando *npath* trajetórias e *ndiv* divisões. Resultados baseados em 10.000 replicações,exceto para o caso com $npath = ndiv =$ 10.000 quando foram realizadas 1.000 replicações. Em cada cela temos: i) média e desvio padrão das estimativas pontuais; ii) percentagem de intervalo de confiança de 95% que contém o valor verdadeiro; iii) largura média dos intervalos de confiança 95%; iv) 2,5% e 97,5% percentis dos valores estimados nas replicações. Valor verdadeiro: R$1, 030.

npath =número de trajetórias	*ndiv* =número de divisões 100	1.000	10.000
100	1,0250; 0,3533 89,26% 1,3261 0,4289; 1,8042	1,0377 ; 0,3549 89,96% 1,3413 0,4355;1,8233	1,0360; 0,3646 89,09% 1,3392 0,4191; 1,8304
1.000	1,0282 ; 0,1126 94,18% 0,4379 0,8168; 1,2573	1,0320 ; 0,1116 94,85% 0,4393 0,8241;1,2597	1.0312; 0,1143 93,91% 0,4398 0,8146; 1,2639
10.000	1.0280; 0,0367 94,05% 0,1389 0,9567; 1,0999	1.0283; 0,0361 94,55% 0,1394 0,9582; 1,1000	1,0311; 0,0372 94,30% 0,1397 0,9590; 1,1023

Referências

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.

CHAN, N. H.; WONG, H. Y. *Simulation Techniques in Financial Risk Management.* 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2015.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979.

GILLESPIE, C.; LOVELACE, R. *Efficient R Programming: A Practical Guide to Smarter Programming.* Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2016.

HULL, J. C. *Options Futures and Other Derivatives.* 10. ed. [S.l.]: Pearson, 2017.

KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Berlim: Springer Science & Business Media, 2013. v. 23.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, p. 141–183, 1973.

MIKOSCH, T. *Elementary Stochastic Calculus with Finance View.* Londres: World Scientific, 1998.

SILVA, B. da. Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo. *Dissertação de Mestrado*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2012.