



Resumo

Equações diferenciais suaves por partes e teoria do controle

Aluno: Edson Cidral Filho - RA 215125
Orientador: Dr. Ricardo Miranda Martins

1 Objetivos

O projeto teve como objetivo transmitir ao estudante o conhecimento teórico e aplicado no assunto das equações suaves diferenciáveis por partes (EDSP's), com foco em especial em teoria de regularização, método da média e suas aplicações no estudo de teoria de controle.

2 Pesquisa

Pesquisa por meio da leitura e estudo de livros e artigos centrados no tema de equações diferenciais suaves por partes, dando enfoque em sistemas de equações lineares por partes e em modelos de teoria de controle.

Foram estudadas definições e teoremas fundamentais para a construção de uma teoria de regularização [1] e da base para aplicação do método da média [3]. E desenvolvido o uso e compreensão de ferramentas de computação algébrica para estudo de soluções numéricas do modelo apresentado nos artigos [2] e [4], e a criação de exemplos próprios como exercício para ilustrar conceitos como soluções periódicas, trajetória, ciclos limites e estabilidade.

3 Resultados

Os resultados exibidos serão alguns teoremas importantes, os exemplos estudados e os gráficos de suas soluções numéricas.

3.1 Método da Média

Teorema 1. Considerando a equação da forma

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon),$$

com $x \in D \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0$. Supondo que $f(t, x)$ e $g(t, x, \varepsilon)$ têm período T em t , e considerando a equação média

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y), \text{ onde } f_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

Vamos supor que

- i. as funções $f, g, \partial f / \partial x, \partial^2 f / \partial x^2$ e $\partial g / \partial x$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M (a qual não depende de ε) em $[0, \infty) \times D, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;
- ii. $f(t, x)$ tem período T em t com média $f_0(x)$; T é uma constante que independe de ε ;



Se p é raiz da função média f_0 e $|\partial f_0(y)/\partial y|_{y=p} \neq 0$, então existe uma solução $\varphi(t, \varepsilon)$ com periodicidade T próxima da esfera de raio p tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \varepsilon) = p.$$

Definição 1. Dada uma sequência de $\{t_n\}$, $\varepsilon > 0$ e uma família de soluções Ψ de um sistema dinâmico, temos que um ciclo limite L é definido como

- i. atrator, se para toda solução $\varphi(t) \in \Psi$ com $\varphi(0)$ ε -próximo de L temos que quando $t_n \rightarrow \infty$ então $\varphi(t_n) \rightarrow x \in L$;
- ii. repulsor, se para toda solução $\varphi(t) \in \Psi$ com $\varphi(0)$ ε -próximo de L temos que quando $t_n \rightarrow -\infty$ então $\varphi(t_n) \rightarrow x \in L$.

Para casos onde há mais de um ciclo limite, é suficiente assumir $\varepsilon < \min_{i \neq j} \{d(L_i, L_j)\}$, onde $d(L_i, L_j)$ seria a menor distância entre quaisquer dois pontos de ciclos limites distintos.

Proposição 1. Dado um sistema dinâmico com $x \in D \subset R^n, t \geq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q(x, y) \end{cases}, \text{ onde } P, Q \text{ são polinômios finitos e ao menos um não-nulo.}$$

Então, o teorema da média pode mostrar no máximo $\frac{m-1}{2}$ ciclos limites na solução deste sistema, onde m é o maior ímpar tal que $m \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Exemplo 1. Dado sistema dinâmico com $x \in D \subset R^n$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon P_{11}(x, y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon Q_{11}(x, y) \end{cases}, \text{ onde } \begin{cases} P_{11}(x, y) = \sum_{i=0}^{11} a_{i,0} \cdot x^i \\ Q_{11}(x, y) = \sum_{j=0}^{11} b_{0,j} \cdot y^j \end{cases}$$

Escolhendo os coeficientes

$$\begin{cases} a_{1,0} = b_{0,1} = -120 \\ a_{3,0} = b_{0,3} = \frac{1096}{3} \\ a_{5,0} = b_{0,5} = -360 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{7,0} = b_{0,7} = \frac{1088}{7} \\ a_{9,0} = b_{0,9} = \frac{-640}{21} \\ a_{11,0} = b_{0,11} = \frac{512}{231} \end{cases}$$

O conjunto de coeficientes escolhidos permite que sua função média f_0 tenha o conjunto de raízes positivas dado por $S_+ = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 4, \sqrt{5}\}$, pelo Teorema da Média, existe então um ciclo limite entorno de cada círculo de raio $r_0 \in S_+$. Portanto, este exemplo possui 5 ciclos limites, o máximo para um sistema onde $\deg(P) = \deg(Q) = 11$.

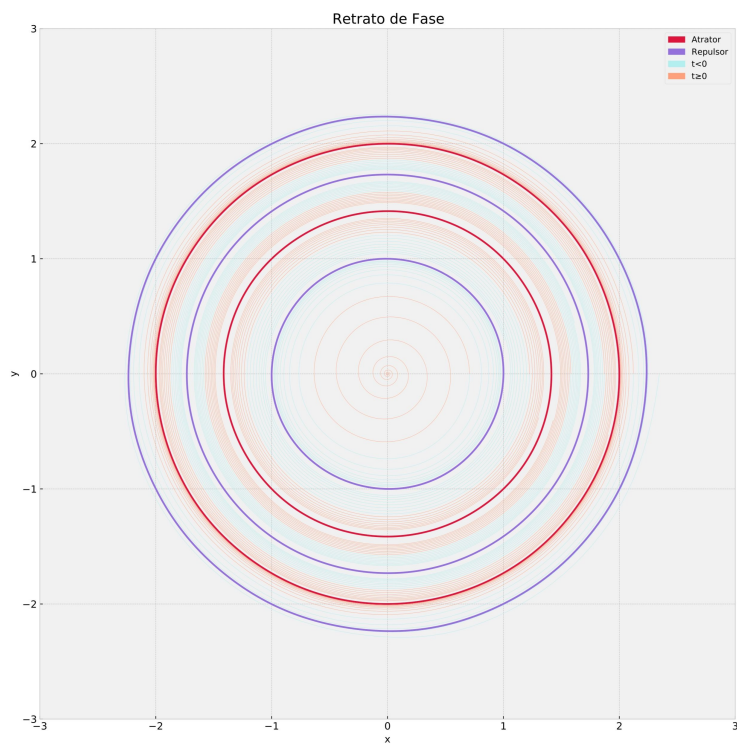


Figura 1: Cinco ciclos limites bem definidos

Utilizando a linguagem computacional *Python* em conjunto com as bibliotecas *NumPy* e *Matplotlib* foi produzida a figura 1, na qual podemos ver a formação de ciclos limites atratores e repulsores classificados de acordo com o comportamento de soluções para valores iniciais distintos das raízes positivas de f_0 .

3.2 Ciclo Limite Estável de um Relógio de Pêndulo

Temos que a equação linearizada do pêndulo é dada por

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \omega^2\theta \approx \frac{1}{\Delta t}p(t, \dot{\theta})$$

onde b é o coeficiente de atrito e a parte direita da expressão representa a influência do mecanismo de escape. Como os ângulos esperados para esse tipo de relógio são pequenos, temos que tal aproximação é ótima e serve bem como modelo. O momento angular impresso pelo mecanismo de escape é descrito pela função $p(t, \dot{\theta})$, dada por

$$p(t, \dot{\theta}) = \begin{cases} \bar{k}_+\delta(t) & \text{se } \dot{\theta} > 0 \\ \bar{k}_-\delta(t) & \text{se } \dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t - 2n\pi/\omega| < \Delta t/2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

temos que $\Delta t > 0$ é pequeno, representando a fração de tempo em que ocorre o acionamento do mecanismo de escape, semelhantemente $\bar{k}_- < 0$ e $\bar{k}_+ > 0$ são os pequenos incrementos no momento angular dados pelo mesmo. Também vale notar que as derivadas na equação linearizada são em



relação ao tempo t .

Agora consideremos a equação dada por

$$\mathbf{x}'(t) = h(t, \mathbf{x}) + \varepsilon f(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 g(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \quad (2)$$

com $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno. Temos que as funções $h, f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são \mathcal{C}^2 , T -periódicas em t e D é um aberto em \mathbb{R}^2 . Vamos assumir que o sistema não perturbado

$$\mathbf{x}'(t) = h(t, \mathbf{x}) \quad (3)$$

tem uma subvariedade de soluções periódicas.

Deixemos que $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ seja uma solução de (3) tal que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Escreveremos a linearização do sistema através da sua solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ como

$$\mathbf{y}'(t) = D_{\mathbf{x}} h(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) \mathbf{y} \quad (4)$$

Definiremos $M_{\mathbf{z}}(t)$ uma matriz fundamental do sistema diferencial linear (4).

Teorema 2. Assumimos que existe um conjunto aberto e limitado V com $\bar{V} \subset D$ tal que para cada $\mathbf{z} \in \bar{V}$, a solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ é T -periódico em t ; então considerando a função

$$f_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t, \mathbf{z}) f(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) dt$$

- i. Se existe $a \in V$ tal que $f_0(a) = 0$ e $\det((df_0/dt)(a)) \neq 0$, então existe uma solução T -periódica $\varphi(t, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- ii. Se todos os autovalores de $(df_0/dt)(a)$ possuem módulo diferente de 1, então para $|\varepsilon| > 0$ suficiente pequeno, a solução periódica correspondente $\varphi(t, \varepsilon)$ de (2) é hiperbólica e do mesmo tipo de estabilidade do ponto singular a do sistema médio $\mathbf{x}'(t) = f_0(x)$.

Teorema 3. A equação diferencial

$$\ddot{\theta} + \bar{b}\dot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{1}{\Delta t} p(t, \dot{\theta}), \quad (5)$$

onde a função $p(t, \dot{\theta})$ vem de (1), para $\Delta t > 0$ suficientemente pequeno tem um ciclo limite estável que tende a órbita periódica

$$\frac{\bar{k}_+}{b\pi} \sin(\omega t) \text{ se } \bar{b}\omega > 0, \quad \frac{\bar{k}_-}{b\pi} \sin(\omega t) \text{ se } \bar{b}\omega < 0$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Exemplo 2. A partir do sistema (5), definindo $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, $\bar{k}_- = 0$ (trataremos de um relógio de pêndulo de apenas uma batida), obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \bar{b}y + q(t, y) \end{cases}$$

onde

$$q(t, y) = \begin{cases} \bar{k}_+ \text{ se } y > 0 \text{ e } |t - 2n\pi/\omega| < \varepsilon/2; \\ 0. \end{cases}$$

Usando os mesmos parâmetros que M. Denny em [2], teremos $(\bar{b}, \bar{k}_+) = (0.22, 0.1s^{-1})$ como nossos coeficientes, $l = 1$ m como o comprimento do pêndulo e os valores iniciais $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (10^\circ, 0)$. Utilizaremos dos mesmos recursos do exemplo 1 para obtermos as soluções numéricas.

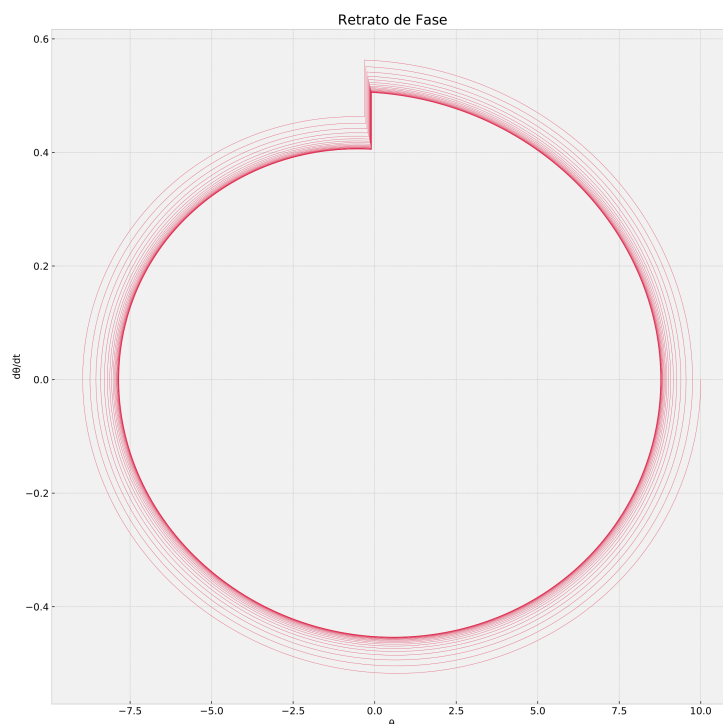


Figura 2: Um ciclo limite bem definido

Temos que a figura 2 obtida é o retrato de fase deste sistema, onde podemos ver a formação do ciclo limite estável semelhante ao obtido no artigo [2]. Tal gráfico representa o ângulo do pêndulo em relação a sua aceleração angular ao longo do tempo t , portanto, a existência do ciclo limite estável mostra o efeito do mecanismo de escape em criar um movimento periódico e comportado do pêndulo, garantindo o funcionamento do relógio.

4 Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins pela excelente orientação no decorrer do projeto e ao CNPq pela concessão da bolsa.

Referências

- [1] M. C. Verges. *Regularização e análise qualitativa de modelos da teoria do controle*. Dissertação de mestrado, Unicamp, 2003.
- [2] M. Denny. *The pendulum clock: a venerable dynamical system*. Eur. J. Phys. 49-58, 2002.
- [3] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 1990.
- [4] J. Llibre, M. A. Teixeira. *On the stable limit cycle of a weight-driven pendulum clock*. European Journal of Physics (Print), v. 31, p. 1249-1254, 2010.