XXVIII Congresso {virtual} de Iniciação Científica da Unicamp 2020

Objetos Arbitrários e o Conceito de Infinito

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FAPESP
Orientador: Prof. Dr. Giorgio Venturi
Aluno: Ívore Campos de Mira

Resumo

Este trabalho teve como objetivo entender melhor a relação entre objetos abstratos, arbitrariedade e infinidades na matemática. Para isso, fizemos a análise de textos pertinentes, com ênfase em Bernays (1935), Ferreiros (2011) e Horsten (2019). Concluímos que a ligação desses conceitos pode ser obtida naturalmente da independência matemática. Mais especificamente, uma vez que aceitemos que o objeto de estudo da matemática possui um caráter autônomo e externo, e o tomemos como fundamental, a minimização de nossas premissas básicas parece ser uma boa escolha metodológica para que nossos estudos revelem a matemática como de fato é. Nesse cenário, falar de objetos é uma forma de preservar a possibilidade de entidades com propriedades intrínsecas, arbitrariedade é uma forma de não requerer um tipo específico de justificação, infinitos se conectam à não limitação do universo teórico, e por aí vai. Ou seja, entendemos que assunções minimais correspondem à maximização do escopo teórico, dada a preservação da consistência na matemática, e esses conceitos podem ser vistos, no mínimo, como ferramentas para implementar essa metodologia.

Introdução

Desde a antiguidade, os filósofos levantaram questões sobre os objetos de uma teoria matemática: existe algum objeto desse tipo? Qual é a natureza de tais objetos? Existem diferenças entre objetos naturais e matemáticos? São objetos matemáticos capazes de fundamentar a certeza da matemática?

A possível conexão entre objetos arbitrários e matemáticos foi notada desde essa época. Platão, por exemplo, propôs que a matemática é sobre universais. De fato, ideias platônicas representam o primeiro exemplo histórico interessante de objetos com um caráter de arbitrariedade: objetos capazes de representar a essência de objetos concretos dos quais são abstrações.

Da mesma forma, a importância do conceito de infinito para a matemática se evidencia desde a antiguidade: Aristóteles distinguia entre infinitos potenciais e atuais para falar de quantos são os números, enquanto Eudoxus, outro aluno de Platão, através de seu método de euxaustão, lidava com ideias primitivas do que viria a ser o cálculo integral.

Esta discussão evoluiu junto com a matemática e, fomentada pelo advento da teoria dos conjuntos, marcou o século XX com intenso debate em matemática fundacional. A nova visão, mais abstrata, de função que surgia, aliada à possibilidade de expressá-la como conjuntos, sugeria que as diversas áreas da matemática poderiam ser unificadas por meio da redução de suas entidades à conjuntos.

O foco de nossa pesquisa está nas raízes desse novo poder explanatório conjuntista. Em específico, como ele relaciona os conceitos de objetos matemáticos, arbitrariedade e infinitos. Bernays (1935), fala sobre esse tema e defende que uma das maiores virtudes das visões platonistas desse período é que a assunção fraca da existência de objetos matemáticos (compromisso ontológico, mas não necessáriamente metafísico), para eliminar a necessidade de elaborar uma forma explicita de justificação das asserções matemáticas (como defendiam construtivistas), se traduz na busca de premissas minimais capazes de expandir ao máximo o escopo da matemática, enquanto preserva a consistência com suas verdades independentes. Ferreiros (2011), por sua vez, vai além ao afirmar que Cantor e Dedekind teriam em mente esse ideal de premissas mínimas ao instituir suas visões de conjuntos (funções). De fato, ele defende que mesmo ZFC não é capaz de expressar a extensão da teoria de conjuntos arbitrários que eles, segundo Ferreiros, propunham. Dessa maneira, temos meios de entender como os conceitos se relacionam e fundamentam a teoria por meio de estudos ontológicos. No entanto, é em Horsten (2019) que encontramos uma tentativa de entender e formalizar as entidades arbitrárias que aparecem nessas ontologias maximais. Ele argumenta em favor da possibilidade de utilizar conjuntos para reproduzir o que entendemos por objetos arbitrários, e mostra formas de utilizar estes objetos para fundamentar a matemática.

Apesar de considerar os pontos levantados por esses autores válidos e promissores, acreditamos que seja necessário um estudo mais detalhado da aquisição de conhecimento dos objetos arbitrários para que críticas epistêmicas como as de Benacerraf (1965), sejam colocadas de lado definitivamente.

Metodologia

Este trabalho teve como objetivo entender melhor a relação entre objetos abstratos, arbitrariedade e infinidades na matemática.

Sendo um projeto majoritariamente exploratório, buscamos alcançar este objetivo por meio da análise dos textos Bernays (1935), Ferreiros (2011), Horsten (2019), Benacerraf (1965) e Incurvati (2020), com ênfase nos três primeiros, que englobam perspectivas clássicas e atuais sobre os temas relevantes. Comparando como cada um deles trata os conceitos fundamentais de nossa pesquisa (arbitrariedade, infinidade e objetos abstratos), pudemos estabelecer um diálogo entre os autores que nos propiciou um panorama geral de como estas ideias são usadas na matemática fundacional.

Resultados e Discussão

Constatamos que o platonismo (mesmo as versões fracas), utilizando-se dos conceitos de objeto abstrato, arbitrariedade e infinidade, é capaz de oferecer respostas simples para questões complexas. Seu poder de capturar a independência da veracidade de fatos matemáticos e expressá-los através de um modo estruturalmente análogo ao de outras áreas do discurso, que tratam de objetos concretos, torna teorias formuladas dessa maneira mais claras. Mais do que isso, porém, a visão de Bernays (1935) e Ferreiros (2011) sobre premissas minimais indica que adotar o platonismo não seria uma questão de admitir a existência de entidades misteriosas de forma inconsequente (como seriam os conjuntos arbitrários sob a visão de construtivistas), mas de rejeitar a adição das premissas restritivas demandadas para excluí-las. Ou seja, aceitar a existência de objetos matemáticos (abstratos, arbitrários e infinitos) poderia ser visto como escolher não reduzir o universo teórico na falta de uma justificativa conclusiva para fazê-lo. Preservando, assim, a liberdade de investigação dos matemáticos e maximizando o escopo da matemática.

É necessário, no entanto, reconhecer que algumas críticas epistêmicas ao platonismo são válidas. Não fica claro como se dá a aquisição de conhecimento matemático, ou como entidades são individuadas, e algumas vezes a mera liberdade provida por visões platonistas radicais, sem os princípios adequados de aquisição de conhecimento matemático, podem gerar problemas (como os paradoxos famosos do século XX).

Conclusão

Concluímos, portanto, que os conceitos de objeto abstrato, arbitrariedade e infinidade, aliados à visões platonistas, capturam bem a essencial independência da matemática e fazem uso dela para criar uma teoria de grande poder explanatório. Porém, ainda é necessário esclarecer como a aquisição de conhecimento ocorre nesse contexto. Assim, julgamos válido que estudos futuros focados na natureza de princípios de abstração (processos pelos quais entraríamos em contato com entidades abstratas, segundo alguns filósofos e matemáticos como Cantor e Frege) e as possibilidades de suas formalizações sejam desenvolvidos para esse fim.

Agradecimentos

Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp) por tornar esta pesquisa possível.

Referências

P. Bernays. (1935). “Sur le platonism dans las mathématiques”, *L’Enseignement Mathématique,* 34, pp. 52-69. Referência a versão em inglês em (P. Benacerraf e H. Putnam, editores). (1983). “Philosophy of Mathematics: selected readings”. pp. 258-271. Cambridge Univrsity Press.

P. Benacerraf. (1965). “What Numbers Could Not Be”, em (P. Benacerraf e H. Putnam, editores). (1983). “Philosophy of Mathematics: selected readings”. pp. 272-294. Cambridge Univrsity Press.

J. Ferreirós. (2011). “ON ARBITRARY SETS AND ZFC”. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 17, n. 3, pp. 361-393.

L. Horsten. (2019). “The Metaphysics and Mathematics of Arbitrary Objects”. Cambridge University Press.

L. Incurvati. (2020). “Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics”. Cambridge University Press.