



Propriedades ergódicas de sistemas dinâmicos

Lucas Viana Reis e Prof. Dr. Christian S. Rodrigues

RESUMO. Neste projeto, estudamos uma introdução à Teoria Ergódica e seus pré-requisitos, focando na sua relação com o formalismo termodinâmico. Como aplicação dos conceitos, investigamos computacionalmente os efeitos da curvatura do espaço na ergodicidade de bilhares planos.

Introdução

Sistemas dinâmicos em tempo discreto consistem de duplas (X, f) que descrevem a ação de uma transformação $f : X \rightarrow X$ sobre os pontos de um espaço X . Assim, eles naturalmente servem de modelo para muitos processos que evoluem com o tempo.

Mesmo quando puramente determinísticos, uma grande classe desses sistemas apresenta comportamento caótico. Ainda assim, essas dinâmicas podem ser estudadas pelas suas propriedades estatísticas, considerando X como um espaço de probabilidade (X, \mathcal{F}, μ) . Em muitos casos, é natural considerar que a medida μ seja invariante por f , ou seja, $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ sempre que $A \subset X$ for mensurável, e ao estudo das dinâmicas munidas dessas medidas se concerne a área da Teoria Ergódica.

Informalmente, sistemas ergódicos são caracterizados pelas médias temporais de observáveis serem as mesmas para todas as trajetórias, e coincidirem com as médias espaciais dos mesmos quando integrados respeito a uma medida invariante. Mais precisamente, o conjunto de condições iniciais para o qual a igualdade falha tem medida nula. Assim, as evoluções temporais de quase todos os pontos do espaço apresentam um comportamento estatístico semelhante, definido pela medida invariante.

Uma forma adicional de estudar essas dinâmicas é pela evolução da correlação entre diferentes observáveis ao avançar do tempo. Se $\psi, \varphi \in L^1(X)$ são observáveis e μ é uma probabilidade invariante, definimos a correlação no tempo n como:

$$C_n(\psi, \varphi) = \int \varphi \cdot \psi \circ f^n d\mu - \int \psi d\mu \int \varphi d\mu.$$

Sistemas são chamados de (fortemente) misturadores quando para todo par de subconjuntos mensuráveis $A, B \subseteq X$ temos que $\lim_n C_n(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B) = 0$, e fracamente misturadores quando $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |C_k(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B)| = 0$. Ambas as misturas implicam na ergodicidade do sistema.

A velocidade do decaimento das correlações também é interessante como forma de caracterizar o comportamento da dinâmica. Dizemos que a dinâmica tem decaimento exponencial de correlações para um subespaço vetorial $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ se existe $\lambda < 1$ tal que para todo par $\psi, \varphi \in \mathcal{V}$, existe $A(\psi, \varphi) > 0$ tal que $|C_n(\psi, \varphi)| \leq A(\psi, \varphi)\lambda^n$ para todo n .

O decaimento das correlações pode ser estudado através do operador de transferência \mathcal{L} , que descreve a ação da dinâmica f em densidades de massa $\rho d\mu$:

$$f^*(\rho d\mu) = (\mathcal{L}\rho) d\mu,$$

de forma que ele é caracterizado por ser o operador dual de f^* no seguinte sentido:

$$\int \varphi \cdot (\psi \circ f) d\mu = \int (\mathcal{L}\varphi) \cdot \psi d\mu.$$

No contexto dos *subshifts* de tipo finito, o operador é conhecido como operador de Ruelle-Perron-Frobenius. Os *subshifts* de tipo finito são dinâmicas simbólicas que também são capazes de modelar outras dinâmicas mais complicadas. Mais precisamente, se $X = \{1, \dots, k\}$ é um alfabeto de k símbolos, denotamos por $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ ou $\Sigma^+ = X^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências (bi-)infinitas de elementos de X com a topologia produto, e consideramos a transformação $\sigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$ chamada de *shift*. Quando colocamos restrições em quais duplas de símbolos consecutivos são permitidas, de acordo com uma matriz de adjacência A , obtemos subconjuntos fechados e σ -invariantes de Σ chamados de *subshifts* e denotados por Σ_A .

Uma maneira natural de colocar uma estrutura de probabilidade nessas dinâmicas resulta nos deslocamentos de Markov unilaterais finitos, que são *subshifts* de Σ_A^+ associados a uma matriz de probabilidades de transição P , onde cada elemento $P_{i,j}$ representa a chance de $x_{n+1} = j$ sabendo que $x_n = i$. Associado a essas probabilidades, um vetor de probabilidades p que satisfaz $P^*p = p$ é chamado de probabilidade estacionária, e define uma medida invariante em $\mathcal{M}_1(\Sigma_A^+, \sigma)$ gerada por $\mu([n; x_n, \dots, x_N]) = p_{x_n} \prod_{i=n}^{N-1} P_{x_i, x_{i+1}}$. A ergodicidade da dinâmica equivale à existência de um caminho entre quaisquer dois vértices no grafo associado a A (chama-se A de irredutível), e a dinâmica é misturadora precisamente quando existe um número fixo de passos a partir do qual é sempre possível passar de um vértice a qualquer outro no mesmo grafo (diz-se que A é aperiódica).

As últimas duas preposições podem ser vistas como consequências do Teorema de Perron-Frobenius, que afirma que toda matriz com entradas positivas admite um único autovetor positivo com autovalor positivo, relativo ao qual todos os outros autovalores têm módulo estritamente menor. Durante o projeto, estudamos a prova do Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius, uma generalização do teorema anterior que se aplica ao operador de transferência dos *subshifts* com matriz aperiódica. Isso é feito demonstrando que o operador tem a propriedade da lacuna espectral, ou seja, um único autovalor positivo e que o resto do espectro tem raio estritamente menor que

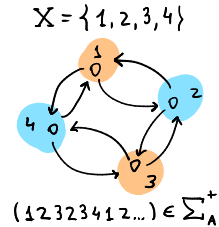


FIGURA 1. grafo de uma matriz de adjacência irredutível, porém periódica.

esse autovalor. O teorema também implica que quando são misturadores, os *subshifts* (em particular os deslocamentos de Markov) apresentam decaimento exponencial de correlações nos subespaços das funções θ -Hölder contínuas, para todo $\theta > 0$.

Bilhares. Os bilhares foram um dos primeiros exemplos de dinâmicas estudadas pela Teoria Ergódica. Eles são sistemas que servem de modelo para gases ideais, objetos de estudo da Mecânica Estatística intimamente relacionados ao início da teoria.

A ideia mais simples dos bilhares são subconjuntos conexos B de \mathbb{R}^2 cuja fronteira é uma curva diferenciável a menos de um conjunto finito de pontos. A evolução temporal considerada move bolas de bilhar, vistas como posições e orientações em $B \times S^1$, por uma trajetória retilínea que colide elasticamente nas paredes. Como estamos interessados em dinâmicas em tempo discreto, podemos considerar que a cada passo a transformação leva cada bola ao instante logo após sua próxima colisão com o bordo, correspondendo ao que se chama de mapa de Poincaré com seção $\partial B \times (-\pi/2, \pi/2)$.

Mais geralmente, podemos ver a mesa de bilhar como um subconjunto conexo e limitado de uma variedade riemanniana M de dimensão d , com restrições análogas para as fronteiras. Agora, a trajetória das bolas são geodésicas, e a colisão com as paredes obedece a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Nesse contexto, a medida $\nu = \cos \theta ds d\theta$ é invariante pela transformação, onde ds é a medida de volume em ∂M e $d\theta$ é a medida de ângulo em S^{d-1} .

Como exemplo de aplicação dos conceitos introduzidos pelo projeto, investigamos computacionalmente o que acontece quando tomamos um bilhar plano e perturbamos a curvatura do espaço de maneira uniforme.

Implementação. A simulação dos bilhares foi construída na linguagem de programação Julia, estendendo a biblioteca pré-existente `DynamicalBilliards`. Essa biblioteca implementa a evolução temporal de bilhares planos e permite construir mesas de bilhar a partir de obstáculos simples como retas, semicírculos e elipses, além de conter funções que desenham gráficos do mapa de Poincaré [3].

A extensão consistiu basicamente em representar as superfícies com curvatura no espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , modificando as funções que resolvem a colisão com cada obstáculo para levar em conta as diferentes métricas dos espaços, e implementar funções adicionais para calcular propriedades como o decaimento de correlações.

O espaço bidimensional de curvatura constante negativa é o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . Dois modelos especiais de \mathbb{H}^2 no disco aberto unitário de \mathbb{R}^2 são os modelos de Poincaré e de Beltrami-Klein. O primeiro é uma representação conforme do plano hiperbólico, e o segundo preserva geodésicas, no sentido de que retas no disco correspondem a geodésicas de \mathbb{H}^2 . De forma semelhante, a superfície de curvatura constante positiva S^2 admite duas projeções análogas em \mathbb{R}^2 , que são as projeções estereográfica, que é conforme, e a gnomônica, que preserva geodésicas.

Pela conveniência das geodésicas retas, que permitiu reutilizar as funções de propagação e os obstáculos poligonais da biblioteca, os bilhares com curvatura foram representados nos modelos de Beltrami-Klein e da projeção

gnomônica em \mathbb{R}^2 . As colisões foram calculadas transportando os vetores tangente da parede e velocidade da partícula para o modelo conforme com o jacobiano da transformação, refletindo um dos vetores em relação ao outro, e então transportando a velocidade resultante de volta com a inversa do jacobiano. Para a análise das correlações, implementamos uma função que realiza numericamente as integrações na definição pelo método de Monte Carlo, simulando um grande número de partículas e calculando uma média dos valores, ponderada pela densidade da medida de cada modelo em relação à medida de Lebesgue na borda do bilhar.

Resultados

O efeito mais importante observado nas simulações foi a evidência de que os bilhares no plano hiperbólico geralmente são ergódicos, enquanto os bilhares na esfera não são. Mais precisamente, os mapas de Poincaré dos primeiros são formados por pontos uniformemente dispersos para a medida invariante, enquanto os mesmos mapas para os últimos mostram que as órbitas ficam confinadas em regiões que dependem das condições iniciais. Ainda assim, existem exceções, uma delas sendo os bilhares circulares, que não são ergódicos em nenhum dos casos.

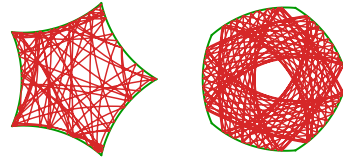


FIGURA 2. exemplos de trajetórias em pentágonos no plano hiperbólico e na esfera. Simulação de 100 colisões, projeções conformes.

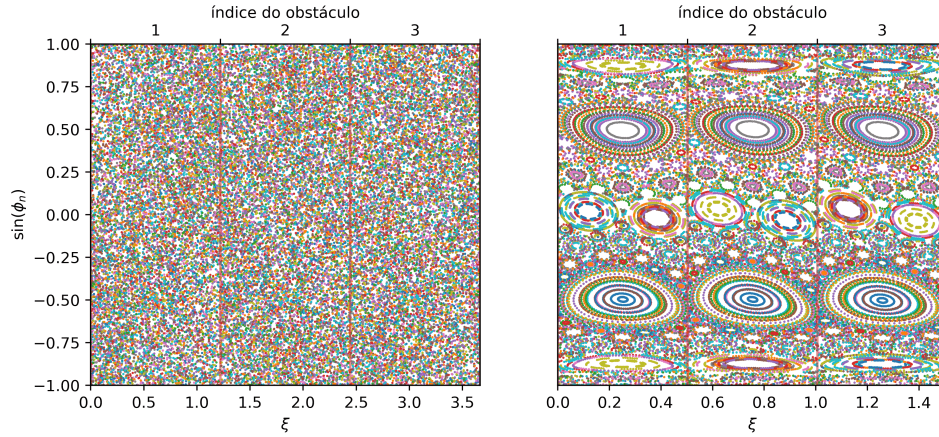


FIGURA 3. mapas de Poincaré de um bilhar triangular no plano hiperbólico e na esfera, respectivamente. ξ é a posição da bola na fronteira, medida com comprimento de cada espaço, e ϕ é o seu ângulo de incidência. Simulações de 200 condições iniciais, que são diferenciadas pelas cores, com 200 colisões de cada.

Outra curiosidade que observamos foi que as trajetórias em bilhares na esfera que têm o mesmo formato da face de um poliedro de Platão sempre são periódicas. De fato, em vez de refletir nas fronteiras, podemos imaginar que a bola segue um caminho inalterado enquanto a mesa é refletida

para o outro lado da parede a cada colisão. Como as geodésicas na esfera são grandes círculos que eventualmente voltam ao ponto inicial, ao fim de uma volta a “imagem final” da mesa de bilhar fica alinhada com a mesa inicial a menos de uma diferença de orientação correspondente a uma simetria do polígono. Mas a ação dessa simetria é sempre a mesma em cada volta e o grupo de simetrias desses polígonos é finito, de forma que eventualmente a orientação coincide com a mesa inicial, fechando o ciclo da trajetória.

Por fim, obtivemos resultados numéricos que sugerem que bilhares no plano hiperbólico cujas paredes são polígonos regulares apresentam decaimento exponencial de correlações, com a constante λ sendo menor para bilhares mais curvos (com raio maior), como ilustrado na figura 5.

Como continuação do projeto, podemos futuramente buscar um melhor entendimento teórico da relação entre a curvatura do espaço e os aspectos observados.

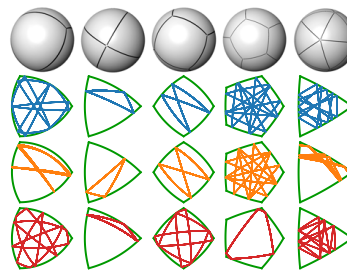


FIGURA 4. qualquer trajetória nos “bilhares Platônicos” é periódica. Condições iniciais aleatórias, projeção estereográfica.

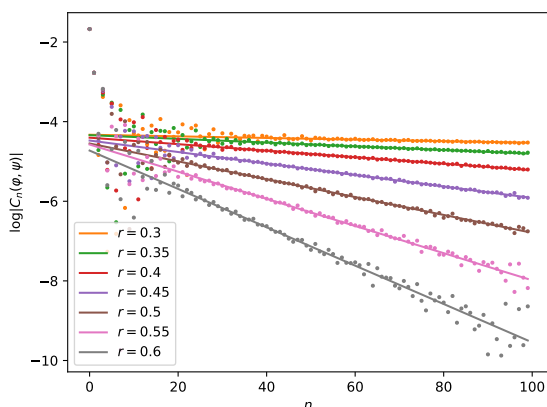


FIGURA 5. estimativas do decaimento de correlações para diferentes mesas de bilhar. As mesas são quadrados regulares de raio r no plano hiperbólico, e funções φ e ψ são iguais à função característica suportada em uma das paredes. Integração de Monte Carlo com 10^7 partículas.

Agradecimentos

Agradeço meu orientador pela gentileza, apoio e tempo na condução do projeto. Também agradeço à Fapesp pela bolsa de iniciação científica¹.

Referências

- [1] K. Oliveira e M. Viana, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, 2ª edição, SBM (2019).
- [2] W. Parry and M Pollicot, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque, 187-188, Société Mathématique de France, (1990).
- [3] G. Datseris, *The Journal of Open Source Software* **2**(19) (2017), 458.

¹Processo nº 2020/00257-5, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). As opiniões, hipóteses, e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.