



# Equações Diferenciais Estocásticas

Hitalo Cesar Alves

2020

## Introdução

As equações diferenciais estocásticas são uma ferramenta muito importante para modelar processos que apresentam algum tipo de aleatoriedade. Estas equações são trabalhadas dentro de uma área da matemática que é denominada "cálculo estocástico". O objetivo deste trabalho é iniciar os estudos nesta área da matemática e suas conexões com a formação do aluno em engenharia de computação. Em particular faremos uma breve introdução a Equações diferenciais estocásticas e a mostraremos uma aplicação a um exemplo clássico que é a modelagem do crescimento populacional.

## Definições básicas

Começaremos dando as definições básicas da teoria:

**Definição 1** *Seja  $\Omega$  um conjunto. Uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  em  $\Omega$  é uma família de subconjuntos de  $\Omega$  com as seguintes propriedades:  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , se  $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$  ( $F^C = \Omega \setminus F$ ) e, e  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  então  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .*

**Definição 2** *Um espaço  $\Omega$  munido de uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  é dito um espaço mensurável. Os elementos de  $\mathcal{F}$  são chamado de conjuntos mensuráveis.*

Se  $\Omega$  está modelando um evento, os conjuntos de  $\mathcal{F}$  denotam os possíveis eventos que podem ocorrer.

**Definição 3** *Uma medida de probabilidade  $P$  sobre um espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{F})$  é uma função  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que*

$$i- P(\emptyset) = 0 \text{ e } P(\Omega) = 1$$

ii- *Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  temos que*

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

**Definição 4** *Uma terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é dita um espaço de probabilidade.*

Fixamos a partir de agora  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  espaço de probabilidade.



**Definição 5** Uma função  $X : \Omega \rightarrow R^n$  é dita mensurável se  $X^{-1}(U) \in \mathcal{F}$  para todo  $U \in \mathcal{B}(R^n)$ .

Se  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é um espaço de probabilidade então uma função mensurável  $X : \Omega \rightarrow R$  é dita uma variável aleatória.

**Definição 6** Um processo estocástico real é um conjunto de variáveis aleatórias  $\{X_t : \Omega \rightarrow R\}$  indexadas por um parâmetro  $t$  tomando valores num conjunto ordenado (usualmente  $N$  ou  $R$ )

## Movimento Browniano

Fazer intro ao movimento browniano.

O movimento browniano é um processo estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$ , ou seja, uma família de variáveis aleatórias indexados por valores não negativos com um espaço de probabilidade comum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e com as seguintes propriedades:  $B_0 = 0$ , função  $t \rightarrow B_t$  é contínua em  $t$ , o processo  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  tem incrementos estacionários e independentes, os incrementos  $B_{t+s} - B_s$  tem distribuição normal com média 0 e variância  $t$ . Ou seja:  $B_{t+s} - B_s \sim N(0, t)$ .

Detalhamos aqui, seguindo o livro de Oksendal [1], uma forma de construir o movimento Browniano como processo estocástico. Para  $x \in R^n$  fixo, defina

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n}} e\left(-\frac{\|x-y\|^2}{2t}\right)$$

para  $y \in R^n$  e  $t > 0$ . Se  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  definimos

$$\nu_{t_1 \dots t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

Estendemos então esta definição de forma tal que seja possível aplicar os teoremas de Kolmogorov e assim construir um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$  e um processo estocástico  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  tal que as distribuições finitas

$$P_x(B_{t_1} \in F_1, \dots, B_{t_k} \in F_k) = \int_{F_1 \times \dots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

**Definição 7** O processo construído acima é dito (uma versão) do movimento browniano começando em  $x$ .

É possível mostrar que este processo pode ser construído de forma tal que os seu caminhos, isto é, as funções  $X_t(\omega) : R \rightarrow R^n$  sejam contínuas utilizando o teorema de continuidade de Kolmogorov (ver [1] pag. 14 teorema 2.2.3)

Indo para o lado de engenharia da computação é podemos ver na imagem abaixo um possível caminho gerado utilizando uma simulação com a linguagem python, a biblioteca numpy e um valor  $k=10000$ .

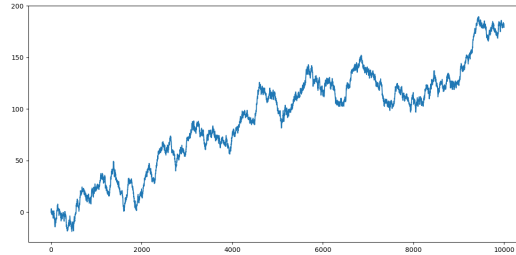


Figura 1: Movimento Browniano com  $k=10000$

## Formula de Itô e equações diferenciais estocásticas

Antes de começar com Equações diferenciais estocásticas definimos a integral de Itô

$$\int_0^t f(s, B_s) dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n, t_i \leq t} f(s_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

onde  $f : R \times R \rightarrow R$  é uma função  $C^\infty$ ,  $B_t$  é o movimento browniano e  $\{\tau_n\}$  uma sequência de partições de  $[0, \infty)$  com  $t_{i_n} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e

$$|\tau_n| = \sup_n |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Uma **Equação diferencial estocástica no sentido Itô (EDE)** a valores reais é uma equação da forma

$$dx_t = X_0(t, x_t) dt + X_1(t, x_t) dB_t$$

onde  $X_i : R \times R \rightarrow R$  são funções  $C^\infty$ .

**Definição 8** Dado  $(s, x) \in [0, T] \times R^n$ , um processo estocástico contínuo  $x_t$ , para  $t \in [s, T]$ , a valores em  $R$  é dito um solução da equação acima, com condição inicial  $x_s = x$  se, e somente se, satisfaz

$$x_t = x + \int_s^t X_0(t, x_r) dr + \int_s^t X_1(t, x_r) dB_r$$

**Teorema 1** Assuma que os coeficientes  $X_0, X_1$  da EDE são globalmente Lipschitz, isto é, existe  $K > 0$  tal que

$$|X_k(t, x) - X_k(t, y)| \leq K|x - y|,$$

para todo  $t \in [0, T]$  e  $x, y \in R^n$ . Então a equação tem solução única para uma dada condição inicial.

Para uma prova deste resultado ver [1] paginas 66-70 teorema 5.2.1

Uma ferramenta poderosa para o estudo das EDE é fórmula de Itô que é o equivalente estocástico ao teorema fundamental do cálculo. Apresentamos aqui uma versão simplificada desta:



**Teorema 2** Seja  $f : R \times R^n \rightarrow R$  uma função  $C^\infty$  e  $\{B_t\}$  o movimento browniano iniciando em  $B_0 = x$  então

$$f(t, B_t) = f(0, x) + \int_0^t \partial_x f(s, B_s) dB_s + \int_0^t \left[ (\partial_t f)(s, B_s) + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(s, B_s) \right] ds.$$

Para uma prova do resultado consultar [1] página 44 teorema 4.1.2.

## Modelo de crescimento populacional

Com o auxílio das ferramentas apresentadas nos tópicos anteriores faremos um estudo de um modelo crescimento de uma população em um ambiente lotado ou não. Aqui apresentamos uma pequena modificação do modelo já conhecido e, até onde sabemos é uma proposta original.

A equação a ser considerada é

$$dX_t = rX_t(K - \alpha X_t)dt + \beta X_t dB_t$$

. Onde  $X_t$  é a população do ambiente. O modelo original pode ser visto em [1] no exemplo 5.1.1 e exercício 5.15 que correspondem respectivamente aos casos  $\alpha = 0$  (ambientes não lotados) ou  $\alpha = 1$  (ambientes superlotados). No caso aqui apresentado permitimos valores de  $\alpha$  que não necessariamente sejam 0 ou 1. Na equação, a constante  $K$  é referente à capacidade do meio, a constante  $r$  é referente à qualidade do meio e a constante  $\beta$  é referente a um ruído no modelo (parte não determinística).

É possível ver, utilizando a fórmula de Itô em conjunto com o método de variação de parâmetros, que a solução da EDE acima é dada por:

$$X_t = \frac{e^{(rK - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t}}{\frac{1}{X_0} + r\alpha \int_0^t e^{(rK - \frac{1}{2}\beta^2)s + \beta B_s} ds}$$

Essa solução, quando substituído  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  colapsa nas soluções dos casos conhecidos citados acima. Em particular, podemos ver que a esperança da variável aleatória  $X_t$ , é

$$E[X_t] = \frac{e^{rkt}}{\frac{1}{X_0} + \frac{\alpha}{K}(e^{rKt} - 1)}$$

Podemos simular as soluções para os diferentes caminhos do Movimento Browniano. Estas simulações são de grande utilidade quando não é possível calcular explicitamente a esperança do processo sendo considerado. Nos gráficos abaixo aparecem as simulações e sua comparação com o valor da esperança obtida explicitamente para o processo sendo considerado. Também, calculando a média das simulações, desenhamos abaixo a esperança estimada pelas simulações. Como era de esperar quanto mais caminhos sejam simulados, mais a esperança simulada se aproxima da esperança obtida em forma analítica. Para fazer as simulações, foi utilizado a linguagem python e métodos de integração numérica. Como se trata de uma função exponencial, foi utilizado escala logarítmica no eixo y para melhor visualização do processo.

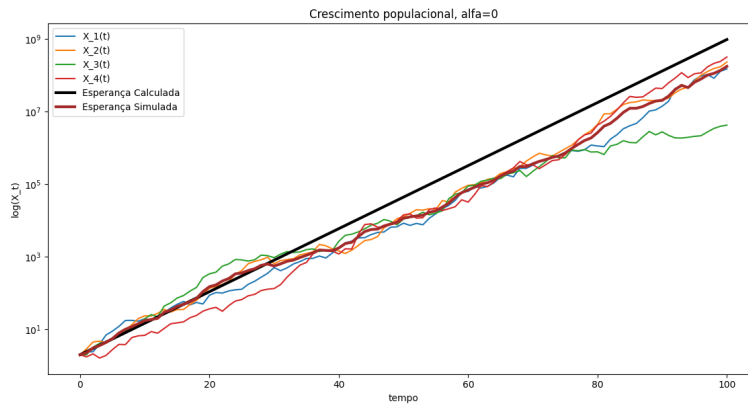


Figura 2: Simulação população não superlotada; Parâmetros:  $r = 0.0002$ ,  $K = 1000$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $X_0 = 2$

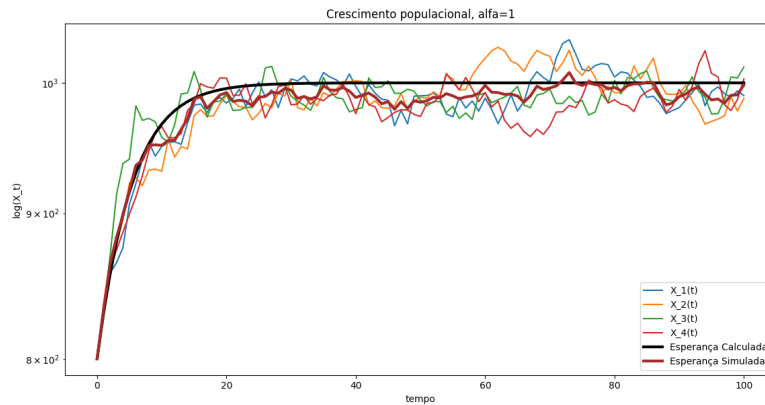


Figura 3: Simulação população superlotada; Parâmetros:  $r = 0.0002$ ,  $K = 1000$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $X_0 = 800$

No caso onde há uma superlotação na população é necessário que  $X_0$  seja mais próximo de  $K$  para que o modelo represente melhor a realidade, por isso foi adotado  $X_0 = 800$ .

## Referências

- [1] Bernt Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* 6th edition. Editora Springer Science Business Media, 2010