UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Gabriely da Cruz Camilo
Orientador: Ricardo Biloti

INTRODUÇÃO A MODELAGEM MATEMÁTICA PARA BIOLOGIA

Campinas
2020

1 Introdução

O curso 51, conhecido popularmente como Cursão, é ofertado pela UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) e é um ABI(Área Básica de Ingresso) de matemática e física em que depois de 3 semestres realizando as matérias comuns, você pode escolher um curso para seguir. Eu já pensei em ir para todos os cursos, até me decidir finalmente em ir para Matemática Aplicada e Computacional. Contudo, descobri que esse curso possui 3 ênfases, e estou confusa em relação a qual escolher. Sendo assim, iniciei esse projeto com a intenção de conhecer um pouco mais sobre o campo da Biomatemática. Portanto, o objetivo deste projeto é realizar uma introdução a modelagem matemática para Biologia, oferencendo assim um conhecimento geral sobre a área e o que ela estuda.

2 Objetivo

Estudar a área de Biomatemática, realizando uma introdução a modelagem matemática para Biologia, para assim obter um conhecimento geral sobre a área.

3 Desenvolvimento

Adotamos como referência principal o livro *Essential Mathematical Biology* de *Nicholas F. Britton* da editora *Springer*.

Durante o estudo estou traduzindo o livro para o Português e adapatando os dados e exemplos para situações do Brasil. Para a construção do livro utilizo a linguagem LaTeX, pois a plataforma é muito utilizada hoje no meio acadêmico e é de grande importância saber utilizá-la. Atualmente estou na metade do segundo capítulo do livro, os conceitos que eu considero mais interessantes, serão apresentados a seguir.

3.1 Dinâmica de População de Espécies Únicas

A primeira pessoa que pensou e realizou um estudo sobre a população humana e apresentou uma estimativa para o tamanho da população, foi o *Sir William Petty* por volta de 1300. E nessa época, mesmo não existindo tecnologia e aparelhos para que ajudassem na contagem, pode-se dizer que ele fez uma boa aproximação concluindo que naquela época havia cerca de 320 milhões de pessoas no mundo. Hoje depois de muitos estudos, chegou-se à estimativa de que em 1300, havia aproximadamente 360 milhões de pessoas. Na Figura 1 vemos um gráfico para o censo mundial desde o ano 0 d.C..

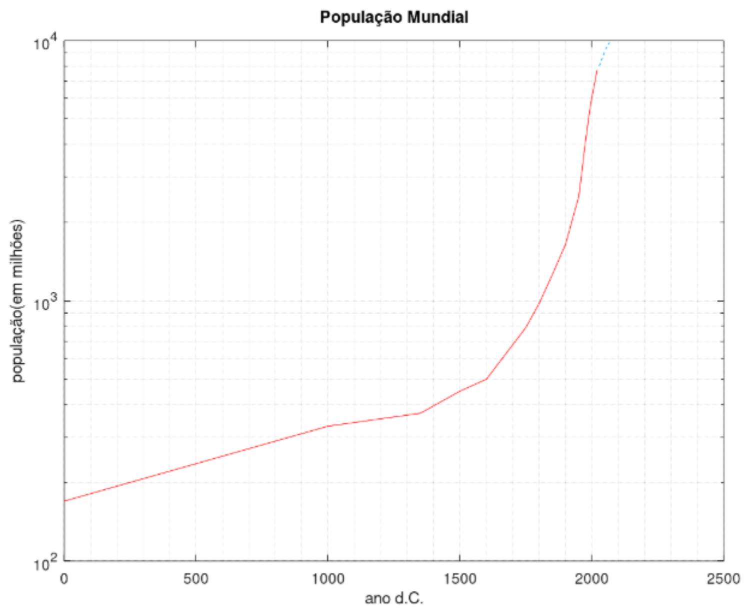

Figura 1: Crescimento da população mundial

Se o crescimento fosse exponencial, deveríamos perceber um comportamento linear no gráfico, devido à escala logarítmica. Considerando até o ano 1500 percebemos esse aspecto linear. Em uma segunda fase, depois do ano 1800, percebemos esse aspecto novamente, porém com uma inclinação maior. Entre essas fases, podemos notar um aspecto semelhante ao comportamento exponencial. O que nos permite concluir que para populações humanas observadas em longas faixas de tempo o crescimento é exponencial com um expoente que muda ao passar do tempo. E daí temos a definição de *processos populacionais não-estacionários*, são processos com parâmetros em mudança ao longo do tempo.

Uma forma de calcular o tamanho da população, é usando um modelo de tempo discreto linear de primeira ordem que pode ser visto na equação (1), onde b é a taxa de natalidade, d a taxa de mortalidade e N_n é o tamanho da população no tempo n.

$$N_{n+1} = (1 + b - d)N_n = \lambda N_n \tag{1}$$

Essa equação é conhecida como *Equação Malthusiana para tempo discreto*, em que o parâmetro λ é a taxa de crescimento líquida. Se o processo é estacionário e λ é constante, sua solução com população inicial N_0 é dada por $N_n = N_0\lambda^n$ que cresce geometricamente com taxa de crescimento λ (se $\lambda > 1$), que é conhecido como *crescimento Malthusiano*.

3.1.1 A Biologia da Dinâmica da População de Insetos

Dado que insetos tem gerações anuais bem definidas, de forma que em cada uma das 4 estações de anos eles passam de ovos para larvas, e a fase de pupa e então de pupas para adultos que põem ovos e logo depois morrem. Toma-se o censo da população na fase de reprodução. Seja R_0 a *taxa reprodutiva básica*, ou seja, a média de ovos postos por cada adulto, considerando que não há mortalidade prematura e que todos os ovos vão se tornar adultos eventualmente, a equação 1 se aplica, fazendo $R_0 = b$ e $d = 1$.

Portanto, numa população real de insetos nem todos ovos sobrevivem para serem contados como adultos no próximo censo, sendo assim consideramos $S(N)$ como a razão que sobrevive. Então a equação 1 se torna a equação 2.

$$N_{n+1} = R_0 S(N_n) N_n = N_n F(N_n) = f(N_n) \tag{2}$$

em que $F(N)$ é a *produção per capita* e $f(N)$ é a *produção*. Se F depende de n então dizemos que o modelo é dependente da densidade.

Agora vamos considerar que as populações de insetos são reguladas por competição intraespecífica (dentro da própria espécie), dada por algum recurso escasso. Seja N_c um valor crítico, ou seja, o valor máximo da população sustentada por esse recurso escasso. Vamos definir a seguir alguns tipos de competição intraespecífica ideal.

- *Sem competição*: todos sobrevivem, logo $S(N) = 1$, $\forall N$.
- *Competição por recurso*: aqui existe um número limitado de recurso em que cada indivíduo que obtém-o sobrevive para procriar e ter filhos, já o que não obtém, morre. Portanto $S(N) = 1$ se $N < N_c$ e $S(N) = N_c/N$ para $N > N_c$.
- *Competição por embaralhamento*: aqui assumimos que o recurso é dividido em partes iguais para cada indivíduo da população. Se a quantidade de recurso distribuída é suficiente para o indivíduo sobreviver, então todos sobrevivem, se não, então todos morrem. Sendo assim, $S(N) = 1$ se $N < N_c$ e $S(N) = 0$ para $N > N_c$.

3.1.2 Metapopulações

Metapopulação é um grupo de subpopulações de uma mesma espécie que não estão ligadas entre si, mas que possuem muitos outros processos em comum e os indivíduos se mudam de uma população para outra. Essa dispersão tende a alcançar uma estabilidade no equilibrio entre a *extinção local* e a *colonização* de áreas vazias, que podem ser ocupadas ou reocupadas ao longo do tempo.

Seja K o número de sítios potencialmente habitáveis e $p(t)$ a fração de sítios que é ocupada no tempo t. Seja e a *taxa de extinção local*, então $e\delta t$ é a probabilidade de um sítio ocupado se tornar desocupado no próximo intervalo de tempo δt. A fração média de sítios que se tornarão desocupados no próximo intervalo de tempo δt é $ep(t)\delta t$. E seja c a *taxa de colonização*, então a probabilidade de um sítio desocupado se tornar ocupado no próximo intervalo de tempo δt é $cp(t)\delta t$. Então a fração média de sítios que serão colonizados no próximo intervalo de tempo δt é $cp(t)(1-p(t))\delta t$.

3.1.3 Coelhos de Fibonacci

Um dos primeiros modelos de crescimento populacional, foi criado por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci. O livro pelo qual ele é mais famoso é o *Liber Abaci*, publicado em 1202, onde no terceiro capítulo, ele colocou a seguinte questão:

> "Um certo homem colocou um par de coelhos em um lugar cercado por paredes. Quantos pares de coelhos esse par original pode produzir num ano supondo que todo mês cada par gera um novo par que a partir do segundo mês se torna produtivo?"

Seja n o tempo n meses depois dele ter colocado os coelhos nessa caixa. Vamos tomar o censo antes do nascimento dos coelhos de cada mês. Se nenhum coelho morre, então todos os coelhos que tinham k meses de idade no tempo n vão ter $k+1$ meses de idade no tempo $n+1$. Seja $y_{k,n}$ a quantidade de pares de coelhos com idade k no tempo n, temos $y_{k+1,n+1} = y_{k,n}$. Assumindo que no tempo 0, temos 1 par de coelhos com 2 meses de idade e 0 pares para qualquer outra idade, chegamos na equação 3.

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \tag{3}$$

Em que temos como resultado a sequência 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55$\cdots$, que é a famosa *sequência de Fibonacci*. Portanto concluímos que a resposta para a questão apresentada anteriormente é 144 pares de coelhos após um ano ou 233 se considerarmos os recém nascidos.

4 Conclusão

O projeto até aqui tem cumprido seu objetivo, visto que estou aprendendo e obtendo conhecimento sobre a área da Biomatemática. Do ponto de vista da metodologia, me propor para traduzir o livro tem se revelado útil não só para estudar a matéria, mas também para melhorar meu inglês técnico e minhas habilidades com ferramentas que serão muito proveitosas para mim no meu curso e na carreira acadêmica, como utilizar o Octave e aprender a linguagem LaTeX. Portanto, acredito que o projeto tem cumprido seu objetivo com êxito.