



LEIS DE KEPLER E A GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Palavras-Chave: LEIS DE KEPLER, GRAVITAÇÃO UNIVERSAL, ÓRBITAS

Autores:

EDUARDO TOFFOLO - UNICAMP

RAPHAEL A. DE L. ALVES - UNICAMP

RODRIGO R. O. DA SILVA - UNICAMP

Prof. Dr. HENRIQUE N. DE SÁ EARP (orientador) - UNICAMP

Resumo

O projeto aborda a relação entre as Leis de Kepler e a Lei da Gravitação Universal de Newton e, em particular, a determinação da trajetória de um corpo sob efeito da gravidade, desde que conhecidas sua posição e velocidade inicial, a partir de conteúdos de Cálculo I e de Geometria Analítica.

1 INTRODUÇÃO:

Uma das grandes conquistas de Newton a favor de sua Lei da Gravitação Universal foi a demonstração da sua quase equivalência às já consagradas Leis de Kepler (em fato, a Lei da Gravitação possui uma descrição um pouco mais geral que as Leis de Kepler).

A 1ª Lei de Kepler afirma que a trajetória de todos os planetas em torno do Sol é elíptica. A Lei da Gravitação, por outro lado, prevê a existência de trajetórias hiperbólicas e parabólicas. Isso configura um aspecto da Lei da Gravitação que não é contemplado pelas Leis de Kepler e motiva a seguinte extensão da 1ª Lei de Kepler, apresentada juntamente às demais:

1ª Lei de Kepler (Estendida). *A trajetória de um corpo que orbita outro corpo massivo descreve uma seção cônica. Em particular, os planetas do sistema solar possuem órbita elíptica.*

2ª Lei de Kepler. *Um corpo em órbita ao redor de outro varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.*

3ª Lei de Kepler. *O quadrado do período orbital é diretamente proporcional ao cubo do raio médio (ou semi-eixo maior) da trajetória elíptica de um planeta, sendo essa constante de proporcionalidade igual para todos os planetas de uma mesma estrela.*

O segundo resultado da Lei da Gravitação que não é previsto pelas Leis de Kepler é a determinação dessa constante (chamada de constante de Kepler de um sistema estelar) a partir da massa do astro que origina a força gravitacional e da constante universal gravitacional que, como o nome sugere, é universal.

Lei da Gravitação Universal. *Dois corpos estão submetidos a forças atrativas de mesma magnitude, proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa, com direção ao centro de massa do sistema. A constante de proporcionalidade é chamada de constante de gravitação universal.*

2 RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Para uma curva diferenciável $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, define-se o vetor tangente à curva no ponto s como $t(s) = \frac{c'(s)}{|c'(s)|}$, o vetor normal como $n(s) = \frac{t'(s)}{|t'(s)|}$ e o vetor binormal como $b(s) = t(s) \times n(s)$. A curvatura $k(s)$ em cada ponto é, então, definida tal que $t'(s) = k(s).n(s)$ e a torção $\tau(s)$ é definida tal que $b'(s) = \tau(s).n(s)$. Como uma curva é plana se, e somente se, sua torção é nula [1], é possível mostrar que:

Teorema 1. *Se a força é central, então a trajetória do corpo sob ação dessa força está inteiramente contida num plano.*

Esse resultado permite que a trajetória de um corpo sob ação da força da gravidade seja definida como um vetor $c(t) = r(t).e(\theta(t)) \in \mathbb{R}^2$, em que $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função da distância do corpo ao Sol em função do tempo, $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é o vetor bidimensional da posição do corpo em função do ângulo formado com um eixo arbitrário e $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 2\pi]$ é o respectivo ângulo em função do tempo.

Feitas as definições, os teoremas que se seguem foram demonstrados seguindo [2].

Teorema 2. *A 2ª lei de Kepler é válida se, e somente se, a força exercida sobre o corpo é central, isto é,*

$$A''(t) = 0 \iff c''(t) = \alpha(t).c(t)$$

para $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar qualquer e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(t)$ seja a área do setor percorrido até o instante t .

Teorema 3. *A 1ª e a 2ª Lei de Kepler são válidas se, e somente se, a força exercida sobre o corpo é central e proporcional ao inverso do quadrado da distância, isto é,*

$$c''(t) = -\frac{H}{r^2(t)}e(\theta(t)) \iff r(t) = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cdot \cos \theta(t)} \text{ e } A''(t) = 0$$

para H, Λ e ε constantes reais.

Teorema 4. Se a 1ª e a 2ª Lei de Kepler são válidas, então a razão entre o quadrado do período orbital de um planeta e o semi-eixo maior de sua trajetória (elíptica) é uma constante $K = 4\pi^2/H$.

Como resultado do teorema 4, a constante de Kepler é a mesma para todo planeta de um sistema estelar se, e somente se, a constante de proporção H também o é. De fato, pela Lei da Gravitação Universal a constante H é dada por $H = GM$, para G a constante da gravitação universal e M a massa da estrela, e portanto é idêntica para todo planeta em um mesmo sistema estelar.

Da demonstração do teorema 3, sabe-se que a taxa de variação da área varrida pelo corpo em relação ao tempo é a constante dada por $S = d \cdot v_{\perp}$, para d a distância entre o corpo e a estrela em dado instante e v_{\perp} a componente da velocidade perpendicular à posição nesse mesmo instante (note que, utilizando a notação vetorial em \mathbb{R}^3 , $S = |\vec{r} \times \vec{v}|$, para \vec{r} o vetor posição e \vec{v} o vetor velocidade e, portanto, S é a razão entre o módulo do momento angular do corpo e a sua massa). Além disso, $\Lambda = \frac{S^2}{H}$ e, para v_{\parallel} a componente da velocidade paralela à posição, a excentricidade da trajetória do corpo pode ser obtida por

$$\varepsilon = \frac{S}{H} \sqrt{v_{\parallel}^2 + \left(v_{\perp} - \frac{H}{S}\right)^2}.$$

A excentricidade da órbita determina o tipo de seção cônica descrita por ela, isto é, para $\varepsilon = 0$ a trajetória é circular, para $0 < \varepsilon < 1$ a trajetória é elíptica, para $\varepsilon = 1$ a trajetória é parabólica e, por último, para $\varepsilon > 1$ a trajetória é hiperbólica (apenas um dos braços da hipérbole). Na prática, corpos com trajetórias circulares ou parabólicas são improváveis e, então, as trajetórias se dividem entre elípticas e hiperbólicas.

Para o caso do sistema solar, a constante H é igual ao produto entre a massa do Sol e a constante universal gravitacional. Utilizando os valores $M \approx 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ para a massa do Sol [3] e $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2\text{N/kg}^2$ para a constante da gravitação universal [4], é possível determinar o tipo de trajetória que o corpo terá dados os valores iniciais para d , v_{\perp} e v_{\parallel} . Alguns casos em que o corpo se encontrava em seu periélio ou afélio e, então, $v_{\parallel} = 0$ são mostrados na tabela 1.

Tabela 1: Valores obtidos para corpos conhecidos

Objeto	Instante	d [m]	v_{\perp} [km/s]	ε	Tipo de trajetória
Terra [5]	Afélio	$1,521 \cdot 10^{11}$	29,29	0,017	Elíptica
Plutão [6]	Afélio	$7,376 \cdot 10^{12}$	4,743	0,25	Elíptica
1I/Oumuamua [7]	Periélio	$3,828 \cdot 10^{10}$	87,71	1,2	Hiperbólica

3 CONCLUSÕES:

O projeto mostra que, a partir dos conteúdos de Cálculo I e de Geometria Analítica, é possível compreender a relação entre as Leis de Kepler e a Lei da Gravitação Universal e, em particular, determinar o tipo de trajetória de um corpo dadas sua posição e velocidade iniciais.

Referências

- [1] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [2] Michael Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, 2008.
- [3] Wikipedia contributors. Sun — Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sun&oldid=1026616726>, 2021. [Online; acessado em 3 de junho de 2021].
- [4] Wikipedia contributors. Gravitational constant — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gravitational_constant&oldid=1023499051, 2021. [Online; acessado em 3 de junho de 2021].
- [5] Wikipedia contributors. Earth's orbit — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Earth%27s_orbit&oldid=1026517525, 2021. [Online; acessado em 3 de junho de 2021].
- [6] Wikipedia contributors. Pluto — Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pluto&oldid=1025890693>, 2021. [Online; acessado em 3 de junho de 2021].
- [7] Wikipedia contributors. 'Oumuamua — Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=%27CA%BB0umuamua&oldid=1026589816>, 2021. [Online; acessado em 3 de junho de 2021].