O Problema do Centro-Foco

Palavras-chave: Centro, Teorema de Hartman-Grobman, Constantes de Lyapunov

Autores:
João Pedro Moresca Martins [IMECC-UNICAMP]
Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins (orientador) [IMECC-UNICAMP]

Este projeto lida, principalmente, com equações diferenciais ordinárias (EDOs) autônomas de primeira ordem em duas dimensões, ou seja, equações da forma

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

onde f é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$.

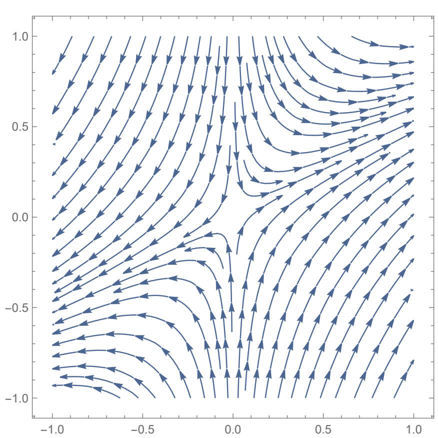
Soluções desse tipo de equação são curvas $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que satisfazem

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t))$$

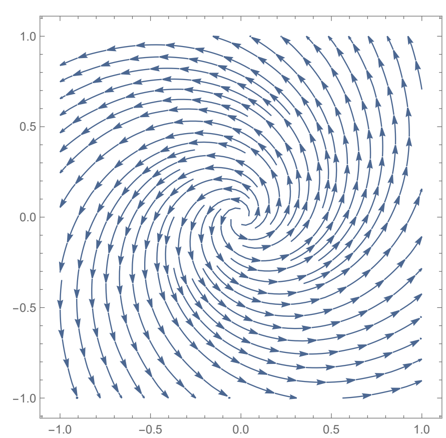
para todo t em I.

Se f for suficientemente suave, garantimos que, para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$, a curva $\varphi_p : I_p \to \mathbb{R}^2$ que resolve a EDO (1) e passa pelo ponto p é única. Sendo assim, podemos cobrir o plano com as chamadas órbitas da EDO (1), que são os conjuntos $\gamma_p = \{\varphi_p(t) : t \in I_p\}$. Se adicionarmos uma orientação a cada órbita, induzida pelo campo f, obtemos o que é chamado de *retrato de fase* desse campo.

Abaixo, temos alguns exemplos de retratos de fase em $\mathbb{R}^2$:

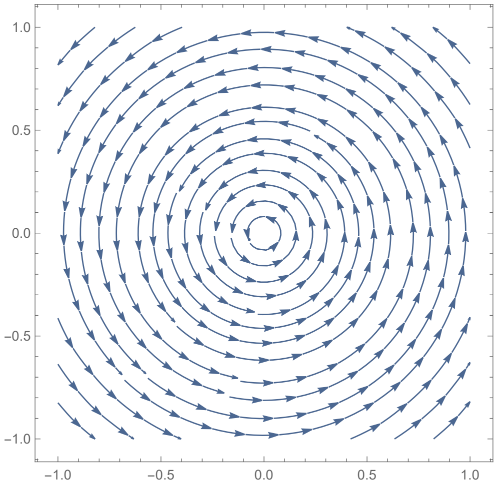


Retrato de fase do tipo sela

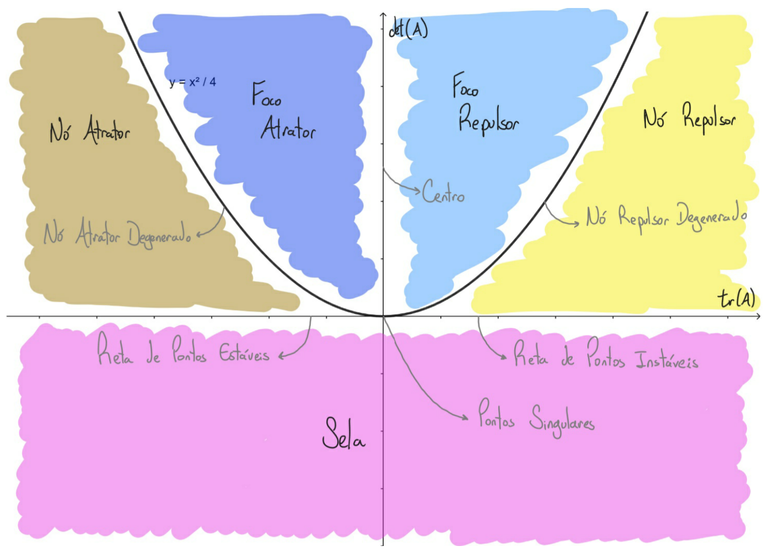


Retrato de fase do tipo foco

Nosso interesse nesse projeto é em retratos de fase ao redor de singularidades isoladas do campo f, ou seja, pontos $p \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(p) = 0$ mas $f(x) \neq 0$ em uma vizinhança de p. Mais especificamente, queremos encontrar as condições necessárias a f para que o retrato de fase ao redor de uma singularidade isolada seja composto por órbitas periódicas, ou seja, curvas fechadas. Quando isso acontece, dizemos que o retrato de fase é do tipo *centro*:



Quando o campo f é linear, digamos, $f = Ax$, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$, as condições necessárias para cada tipo de retrato de fase são conhecidas e dependem apenas do traço e do determinante da matriz A. Sendo assim, podem ser condensadas em um único gráfico, o chamado diagrama traço-determinante:



Se f não for linear, temos um resultado que pode nos levar de volta ao caso linear. Para isso, se $p \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade isolada de f, nos voltamos para a matriz $M := \mathrm{d}f(p)$, a chamada matriz de linearização do campo f. O resultado do qual estamos falando é o Teorema de Hartman-Grobman, que diz que, se M for uma matriz hiperbólica, isto é, não possuir autovalores com parte real nula, então o retrato de fase do campo f é do mesmo tipo que o do campo linear Mx em uma vizinhança de p. Por isso o diagrama traço determinante é tão importante.

Nosso problema surge quando a matriz M não é hiperbólica. Nesse caso, não há como determinar, a priori, se o retrato de fase será do tipo centro ou do tipo foco. Esse é o problema do centro-foco.

Há várias maneiras de se abordar esse problema. Neste projeto, buscamos por campos Hamiltonianos (quando $f = (H_y, -H_x)$ para alguma função H) e reversíveis (quando $\mathrm{d}\phi(x)f(x) = -f(\phi(x))$ para alguma involução ϕ), olhamos para o mapa de Poincaré e também para o método das constantes de Lyapunov.

Se o campo for Hamiltoniano, suas órbitas são curvas de nível da função H, então basta olhar para essa função para buscar curvas fechadas, o que facilita muito essa busca.

Se for reversível, o retrato de fase é simétrico em relação ao conjunto de pontos fixos de ϕ. Para que uma órbita seja periódica, basta, então, que toque esse conjunto em dois pontos distintos. Mais ainda, temos um teorema que diz que qualquer campo vetorial analítico em $\mathbb{R}^2$ cuja parte linear seja equivalente a $(-y, x)$ é reversível se, e somente se é um centro.

Quando a linearização do campo f for da forma $(-y, x)$, o mapa de Poincaré está bem definido. Trata-se de uma função $\pi : \Sigma_0 \to \Sigma$, onde $\Sigma_0 \subset \Sigma$ e Σ é uma seção do eixo x positivo, que leva um ponto x em $\varphi_x(T)$, onde T é o menor tempo positivo para o qual φ_x pertence a Σ. Em outras palavras, é uma função que leva um ponto de Σ_0 em seu primeiro retorno (a Σ) através da trajetória do campo f. É claro que, se $\pi(x) = x$, a órbita por x, γ_x, é periódica.

As constantes de Lyapunov são números cujo sinal vai nos dizer se trajetórias se aproximam ou se afastam de uma singularidade isolada. Se todas forem iguais a 0, teremos um retrato de fase do tipo centro. Neste projeto, estudamos o algoritmo desenvolvido por J. Torregrosa em [3] e o aplicamos para o exemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ \dot{y} = x + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 \end{cases}$$

com a ajuda do software Mathematica. O código desenvolvido se encontra abaixo:

```
Z[j_] := If[1 < j < 5, Subscript[a, j]*((x + y)/2)^j + Subscript[b, j]*((x - y)/(2*I))^j, 0]
F[2] := x*y/2
\[Phi][l_, k_] := Z[k]*(D[F[l], x] + D[F[l], y])
S[p_] := Sum[\[Phi][p - i + 1, i], {i, 2, p - 1}]
K[p_, k_] := Coefficient[-I*S[p], x^(p - k)*y^k]
h[p_] := Table[If[2 k - p != 0, K[p, k]/(2 k - p), 0], {k, 0, p}]
F[p_] := Sum[h[p][[k]]*x^(p - k + 1)*y^(k - 1), {k, p + 1}]
V[p_] := Simplify[I*K[p + 1, (p + 1)/2]]
```

Executando esse código, obtemos as seguintes constantes de Lyapunov (constantes com índice par são sempre iguais a zero):

$$V_3 = \frac{3}{8}a_3,$$

$$V_5 = -\frac{1}{32}a_3(53a_2^2 + 48a_2b_2 + 3(5b_2^2 + b_3)),$$

$$V_7 = -\frac{1}{6144}a_3(-62786a_2^4 + 1989a_3^2 - 101440a_2^3b_2 + 10720a_4b_2 + 930b_2^4 + 8760b_2^2b_3 +$$
$$+1071b_3^2 + a_2^2(-61272b_2^2 + 8508b_3) + 4704b_2b_4 + 4a_2(6692a_4 - 2970b_2^3 + 4575b_2b_3 + 1956b_4)).$$

Referências

[1] M. A. Teixeira, J. Yang, *The center-focus problem and reversibility*. Journal of Differential Equations **174**, 237–251 (2001).

[2] J. Chavarriga, M. Sabatini, *A Survey of Isochronous Centers*. Qualitative Theory of Dynamical Systems **1**, 1–70 (1999).

[3] *The center-focus and cyclicity problems*. J. Torregrosa, 2016. Disponível em `http://www.gsd.uab.cat/index.php?option=com_publications&view=publications&task=download&ID=Tor2016.pdf-2d3306127899d249201d9d1f1fad5312.pdf&OD=Tor2016.pdf`. Acesso em: 11 de agosto de 2021.

[4] *Notas de aula do Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes*. Curso de Equações Diferenciais Ordinárias, primeiro semestre de 2021. Site do professor: `http://www.ime.unicamp.br/~ddnovaes/`.