CLASSIFICAÇÃO DE POLIEDROS

Palavras-Chave: GEOMETRIA ESPACIAL, POLIEDROS, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Autores/as:

CECÍLIA GONÇALVES DE ANIZ [IMECC]

Prof. Dr. MARCOS BENEVENUTO JARDIM (orientador) [IMECC]

INTRODUÇÃO:

A Geometria Espacial é a área da Matemática responsável pelo estudo de objetos no espaço tridimensional euclidiano. Entre estes objetos estão os *poliedros*, muito importante para outras áreas e estudados a séculos. Nesta pesquisa, definimos poliedros como “figuras sólidas limitadas por polígonos planos” (Hartshorne, 2000). Uma definição mais formal e com menos chance de erros, diz que poliedros são a união de um número finito de polígonos planos e seus interiores que satisfazem:

- Cada lado de um polígono é lado de um, e somente um, outro polígono;
- Cada vértice de um polígono é vértice de outro polígono;
- Quando a intersecção de dois polígonos não for vazia, é necessariamente um lado comum entre eles ou um vértice comum entre eles e

Os lados comuns entre dois polígonos são chamados de arestas do poliedro, denotadas por A, o conjunto de cada poliedro com seu interior é uma face do poliedro, denotados por F, e os vértices dos polígonos são chamados de vértices do poliedro, denotados por V. Dizemos que a valência de um vértice é o número de arestas que se incidem dele e usamos V_k para representar o número de vértices de valência *k*. Usamos F_k para representar o número de faces com *k* lados. Exemplos de poliedros são as pirâmides e os prismas, como podemos ver na Figura 1. É possível perceber, portanto, que a pirâmide da figura tem 6 arestas, 3 faces e 4 vértices de valência 3.

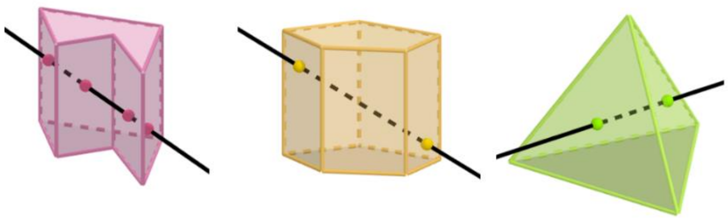

Figura 1 - Da direita para a esquerda: prisma não convexo, prisma convexo e pirâmide convexa. Figura produzida no software Geogebra.

Dizemos que um poliedro é *convexo* se, para qualquer reta que não passa por um de seus vértices, não está contida em planos que contém suas faces e não é paralela a nenhuma de suas faces, o corta em exatamente 2 pontos. O primeiro prisma da Figura 1, por exemplo, não é convexo porque existe uma reta que respeita as restrições citadas e o corta em

4 pontos. Já o segundo prisma e a pirâmide são convexos, todas as retas os cortam em exatamente 2 pontos.

Partindo dessas definições existem muitas maneiras diferentes de classificar os poliedros. Classificações são muito importantes para a Matemática para que se possa entender a fundo o objeto de estudo e encontrar padrões e recorrências. Do ponto de vista educacional, as classificações podem ser muito úteis na sala de aula, o professor pode apresentá-las e incentivar que os alunos as investiguem e façam testes, que é abordagem ideal da Resolução de Problemas para alunos de séries finais do ensino fundamental e médio (Bizinoto, 2016). Desta forma, os alunos podem se encorajar a propor e solucionar novos problemas, se tornando pessoas com senso crítico e mais desafiadoras.

As classificações mais usuais para poliedros, utilizadas no ensino básico, são os Sólidos de Platão e os Sólidos de Arquimedes. Os Sólidos de Platão são aqueles cujos todas as faces são polígonos regulares (com todos os lados iguais) congruentes e todos os vértices possuem a mesma valência (concorrem o mesmo número de arestas). Os Sólidos de Arquimedes são aqueles cujas faces são polígonos regulares e todos os vértices congruentes, com o mesmo número e tipo de faces incendidas deles. Eles divergem dos Sólidos de Platão porque todas as faces não precisam ser congruentes, desta forma, todos os Sólidos de Platão são também de Arquimedes. Os prismas e os antiprismas são exemplos, todos seus vértices incidem o mesmo arranjo de polígonos, suas faces são polígonos regulares, não necessariamente congruentes. Além deles, existem apenas outros 13 Sólidos de Arquimedes, obtidos a partir de operações com os Sólidos de Platão.

Tendo em mente a importância das classificações na Resolução de Problemas e os Poliedros de Platão e Arquimedes, na pesquisa foi desenvolvido uma classificação em relação ao número de arestas e faces dos poliedros convexos, com ponto de partida nas propriedades combinatórias, que serão apresentados mais à frente. A classificação é formulada levando em conta a influência das classificações na Educação e, mais especificamente, na resolução de problemas.

Essa pesquisa tem como objetivo o estudo das classificações de poliedros e das suas possibilidades na Resolução de Problemas. Desta forma, visa apresentar os poliedros convexos e suas classificações usuais e criar uma classificação que permita novas perspectivas na educação matemática.

Por fim, a aluna e o orientador gostariam de agradecer a Fundação FAPESP por financiar esta pesquisa, o software Geogebra, onde foram produzidas as imagens e a Universidade Estadual de Campinas.

METODOLOGIA:

A pesquisa foi realizada a partir da leitura de livros sobre Geometria Espacial, também foram estudados artigos científicos de revistas acadêmicas, como a “Revista do Professor de Matemática”, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Tais leituras foram importantes para a familiarização com os conceitos de poliedros e suas classificações.

Ademais, para a construção da classificação a partir das propriedades combinatórias foram realizados, com ajuda do orientador, exercícios que questionam os poliedros existentes com número de arestas variando de 6 a 10. Estes números foram quantificados pensando na viabilidade de resolução e no interesse em contextos pedagógicos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Antes de discutirmos as classificações e os resultados, precisamos definir e encontrar as propriedades combinatoriais nos poliedros convexos. As propriedades combinatórias dizem respeito ao número de faces, arestas e vértices e como esses números podem se relacionar.

Uma das propriedades mais conhecidas é o "Teorema de Euler para Poliedros Convexos" que nos diz que em poliedros convexos $V - A + F = 2$. Existem traços da sua existência datados em 1758 e, desde de lá, ele já foi provado e aprimorado de muitas formas diferentes (Lima, Carvalho, Wagner, 2000). Podemos encontrar outras propriedades trabalhando em cima da definição de poliedro:

Sabemos que o número de vértices em um poliedro é a soma dos vértices de todas as valências:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \ \dots$$

Podemos afirmar também que para cada vértice de valência 3 temos 3 arestas incidentes dele, de valência 4 temos 4 arestas incidentes e assim por diante. Como cada aresta conecta dois vértices, afirmamos:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + \cdots + KV_k + \cdots$$

Podemos manipular essa equação:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + \cdots + KV_k + \cdots$$

$$2A = 3(V_3 + V_4 + V_5 + \cdots + V_k + \cdots) + V_4 + 2V_5 + \cdots + (K-3)V_k + \cdots$$

$$2A = 3V + V_4 + 2V_5 + \cdots + (K-3)V_k + \cdots$$

A partir dessa igualdade podemos concluir que: $2A \geq 3V$

Se admitirmos que o poliedro é convexo, ou seja $V - A + F = 2$, também podemos afirmar que:

$$2 + A = V + F \Rightarrow 6 + 3A = 3V + 3F$$

Como $3V \leq 2A$, então $3V + 3F \leq 2A + 3F$ e assim:

$$6 + 3A = 3V + 3F \leq 2A + 3F$$

$$6 + 3A \leq 2A + 3F$$

$$A + 6 \leq 3F$$

Conseguimos fazer manipulações muito parecidas, com a mesma linha de raciocínio, pensando em faces em vez de vértices. Assim, estamos munidos das seguintes propriedades combinatórias:

- $V = V_3 + V_4 + V_5 + \ \dots$
- $2A = 3V_3 + 4V_4 + \cdots$
- $2A = 3V + V_4 + 2V_5 + \cdots$
- $2A \geq 3V$
- $A + 6 \leq 3V$
- $F = F_3 + F_4 + F_5 + \cdots$

- $2A = 3F_3 + 4F_4 + \cdots$
- $2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \cdots$
- $2A \geq 3F$
- $A + 6 \leq 3F$

Antes da classificação também precisamos definir uma relação entre poliedros. Dizemos que dois poliedros ρ_1, ρ_2 são *parecidos* se existe uma bijeção entre os conjuntos dos seus vértices, ou seja, se para todo vértice de ρ_1 existe somente um vértice em ρ_2 correspondente com configurações iguais (número de arestas incidentes e número de lados das faces incidentes). Note que, como consequência, os dois poliedros terão o mesmo número de arestas e faces. Conseguimos afirmar também que esta é uma relação de equivalência.

Finalmente, partimos para a classificação. Ela é baseada no número de arestas, buscamos encontrar todos os conjuntos de poliedros parecidos com um número determinado de arestas, podemos fazer isso usando a definição de poliedros e as propriedades combinatoriais. Em outras palavras, vamos classificar classes de equivalência de poliedros parecidos usando o número de arestas como ponto de partida. Escolhemos as arestas porque se partíssemos do número de vértices ou faces bastaria usar as propriedades e o problema voltaria para as arestas. Por exemplo, se procuramos todos os poliedros com 5 faces saberíamos que $2A \geq 15$ e que $A + 6 \leq 15$, ou seja, $8 \leq A \leq 9$, o próximo passo é encontrar os poliedros com 8 e 9 arestas e verificar quais deles tem 5 faces.

Vejamos um exemplo: encontramos todos os poliedros com 8 arestas.

Vamos utilizar as propriedades. Como $2A \geq 3V \Rightarrow 16 \geq 3V$. Sabemos que o número de vértices é um número inteiro e que todo poliedro tem pelo menos 4 vértices. Logo $4 \leq V \leq 5$, ou seja, $V = 4$ ou $V = 5$. Analogamente, como $2A \geq 3F \Rightarrow 16 \geq 3F$ e então $F = 4$ ou $F = 5$. No entanto, todo poliedro com 4 vértices ou 4 faces é uma pirâmide triangular (Jardim, 2021), que tem 6 arestas. Assim sabemos que $V = 5$ e $F = 5$. Usando $2A = 3V + V_4 + 2V_5 + \cdots$ vemos que:

$$16 = 15 + V_4 + 2V_5 + \cdots \Rightarrow 1 = V_4 + 2V_5 + \cdots$$

E como o número de vértices é sempre inteiro, afirmamos que $V_k = 0\ \forall k < 4$, ou $V_4 = 1$. Por fim:

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + \ \ldots$$

$$5 = V_3 + 1 \Rightarrow V_3 = 4$$

Analogamente, encontramos $F_3 = 4$ e $F_4 = 1$. Agora bastamos encontrar os poliedros de 8 arestas, 5 vértices, um com valência igual a 4 e quatro com valência igual a 1, e 5 faces, quatro triangulares e uma quadrangular. Note que esses poliedros são todos aqueles que são parecidos com uma pirâmide de base quadrada. A pirâmide possui exatamente essas características e, por definição, todos os poliedros parecidos a ela também possuíram, veja na Figura 2 a pirâmide e dois outros poliedros parecidos. Mesmo que um deles seja não convexo, todos cabem na mesma classificação. Diferente de Platão e Arquimedes, essa classificação não valoriza arestas e faces de comprimentos e áreas iguais e, sim, de disposições iguais.

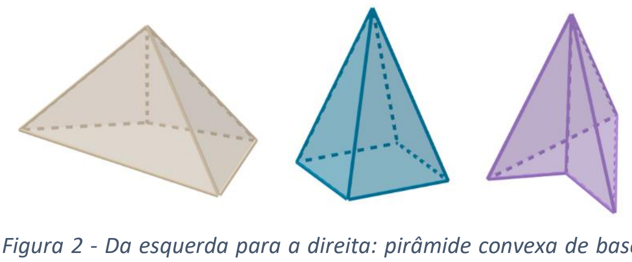

Figura 2 - Da esquerda para a direita: pirâmide convexa de base de trapézio, pirâmide convexa com base quadrada e pirâmide não convexa. Figura produzida no software Geogebra.

Seguindo essa linha de raciocínio conseguimos encontrar todos os conjuntos de poliedros parecidos com determinados números de arestas. Em algumas situações, existem mais de um conjunto de poliedros parecidos, por exemplo, os poliedros com 10 arestas são aqueles parecidos com uma pirâmide de base pentagonal e aqueles parecidos com a cunha tetragonal. Nesta pesquisa, partimos dos poliedros de 6 arestas, uma vez que esse é o menor número de arestas em um poliedro (Jardim, 2021), até os poliedros de 10. Os resultados se encontram na Tabela 1, todo poliedro com o número de arestas da coluna da esquerda é parecido com um os poliedros citados na coluna da direita.

Pensando na Resolução de Problemas, essa classificação pode ser proposta aos alunos depois que os conceitos de poliedros, arestas, vértices e faces já foram apresentados. O professor pode questionar quantos poliedros diferentes eles conseguem encontrar com certo número de arestas, questionar o que fazem esses poliedros serem diferentes, para que eles criem intuitivamente a noção de poliedros parecidos e desenvolvam seu conhecimento de Geometria Espacial. Também é possível apresentar a classificação ou a definição de poliedros parecidos prontas e questioná-las, fazendo com que os alunos investiguem como ela foi criada.

Classificação com relação ao número de arestas	
Nº de arestas	Poliedros Convexos Possíveis
6	Pirâmide com base triangular
7	Impossível
8	Pirâmide com base quadrilátera
9	Bipirâmide triangular, tronco de pirâmide triangular e prisma triangular
10	Pirâmide com base pentagonal e Cunha Tetragonal*

Tabela 1- Tabela de classificação de poliedros a partir do número de arestas.

**nome do poliedro adaptado de https://en.wikipedia.org/wiki/Hexahedron*

CONCLUSÕES:

As classificações de poliedros, sejam elas as mais usuais ou as novas, são muito úteis na Educação Matemática. Elas podem ser usadas em um contexto de Ensino de Matemática para a Resolução de Problemas e assim incentivar os alunos a procurar mais sobre poliedros e Geometria Espacial e até mesmo aprimorar seu senso crítico e sua percepção. Classificar os poliedros a respeito do seu número de arestas traz uma nova visão e cria novas possibilidades de problemas a serem apresentados em sala de aula que podem estimular o pensamento matemático.

BIBLIOGRAFIA

BIZINOTO, José Henrique. **Resolução de Problemas de Geometria Métrica Espacial com utilização da Tecnologia da Informação e Comunicação.** Uberaba, UFTM, 2016

HARTSHORNE, Robin. **Geometry: Euclid and Beyond.** Berkeley, Springer, 2000

JARDIM, Marcos Benevenuto. **Notas de aula.** Campinas, 2021

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio Volume 2.** Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio Volume 4.** Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007

PEDONE, Nelma Maria Duarte. Poliedros de Platão. **Revista do Professor de Matemática,** Rio Grande, v.15