



# Análise de Confiabilidade estrutural aplicado às máquinas rotativas

**Palavras-Chave:** [Quantificação de incerteza], [Confiabilidade estrutural], [dinâmica de rotores]

**Autores/as:**

**DOUGLAS MASSAKATSU KOHATSU [FEM - UNICAMP]**

**Prof. Dr. HELIO FIORI DE CASTRO (orientador) [FEM - UNICAMP]**

---

## INTRODUÇÃO:

A previsão do comportamento dinâmico de máquinas reais é uma importante ferramenta, a qual pode ser aplicada no projeto de máquinas novas e em análises de máquinas já existentes e que estão em funcionamento. Portanto, modelos matemáticos são desenvolvidos para exercerem este papel. Muitos parâmetros de modelos matemáticos podem ser considerados como variáveis estocásticas, ou seja, eles podem assumir valores, obedecendo distribuições estatísticas, de modo que não se pode definir um valor único. Isto se dá, devido às incertezas a respeito desses parâmetros.

Essa variação presente nos dados dos modelos matemáticos pode influenciar determinados resultados, como por exemplo, a previsão da probabilidade de falhas desses sistemas. Atualmente, existem métodos que realizam essas análises, considerando o comportamento estocástico dos parâmetros, como por exemplo o método de Monte Carlo, o FORM e o SORM, no qual eles encontram a probabilidade de sucesso que o sistema tem de exercer sua função, sob determinadas condições de operações e durante um certo período, ou seja, eles encontram a confiabilidade do sistema.

Neste contexto, esse trabalho apresenta brevemente sobre a implementação dos métodos FORM e SORM. Em seguida, são apresentadas as modificações feitas e a melhora dos resultados desses métodos aplicados a problemas de falhas em máquinas rotativas. Por fim, apresenta-se uma análise de uma viga biapoiada sofrendo uma força externa e um empenamento.

## METODOLOGIA:

Para que a confiabilidade estrutural possa ser estimada, primeiramente, define-se a função de estado limite, dado pela equação 1.

$$Y = g(X) \tag{1}$$

em que X são os parâmetros de entrada. Se a função de estado limite resultar em um valor positivo, significa que ela está em um estado desejável. Caso ela resulte em um valor negativo, significa que ela está em uma situação inaceitável. Por fim, um resultado nulo definiria o limite entre as duas condições.

Os parâmetros de entrada X podem ter uma natureza estocástica. Uma análise de incerteza sobre o sistema de saída nos permite entender, gerenciar e atenuar os impactos no sistema de saída causada pela variabilidade das entradas. Dessa maneira, a função de estado limite  $g(X)$  pode

também assumir uma resposta estocástica. Por essa razão, mesmo que se espere um valor positivo a função de estado limite, ainda há a probabilidade de  $g(X)$  ser negativo. Desse modo, a probabilidade de falha pode ser definida conforme a equação 2.

$$P_f = P\{g(X) < 0\} \quad (2)$$

### FORM

O FORM (*First Order Reliability Method*) foi inicialmente formulado por Hasofer e Lind (1974), e, posteriormente, modificado por Rackwitz e Fiessler (1978). Trata-se de um método que calcula a probabilidade de falha. Primeiramente, deve-se definir uma função de estado limite  $g(\mathbf{X})$ , a qual representa uma fronteira entre um estado de funcionamento e um estado de falha, sendo  $\mathbf{X}$  o conjunto de variáveis estocásticas. Por exemplo, em um caso de análise de tensões, a função de estado limite poderia ser definida pelo limite de resistência do material menos a tensão aplicada. A sua implementação segue conforme mostra o fluxograma da Figura 1. As equações 3 a 7 são:

$$g'(\mathbf{X}) = \frac{g(\mathbf{X}+h) - g(\mathbf{X}-h)}{2h} \quad (3)$$

$$\alpha_k = \frac{\nabla G(U_k)}{|\nabla G(U_k)|} \quad (4)$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{G(U_k)}{|\nabla G(U_k)|} \quad (5)$$

$$U_{k+1} = -\beta_{k+1} * \alpha_k \quad (6)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (7)$$

sendo que  $g'(\mathbf{X})$ , é a derivada parcial de  $g(\mathbf{X})$  em  $\mathbf{X}$ ,  $h$ , um valor de incremento, utilizado como diferença finita para o cálculo do gradiente,  $\nabla G(U_k)$ , é o gradiente da função de estado limite do ponto de estimativa  $U_k$ ,  $P_f$ , é a probabilidade de falha, e  $\Phi$  a função de distribuição cumulativa gaussiana. Importante ressaltar que a variável estocástica  $U$  é uma distribuição normal padrão, correspondente à variável estocástica  $X$  que pode ser não gaussiana. De forma análoga, a função  $G(U)$  corresponde a função de estado limite  $g(\mathbf{X})$  calculada a partir das variáveis  $U$ .

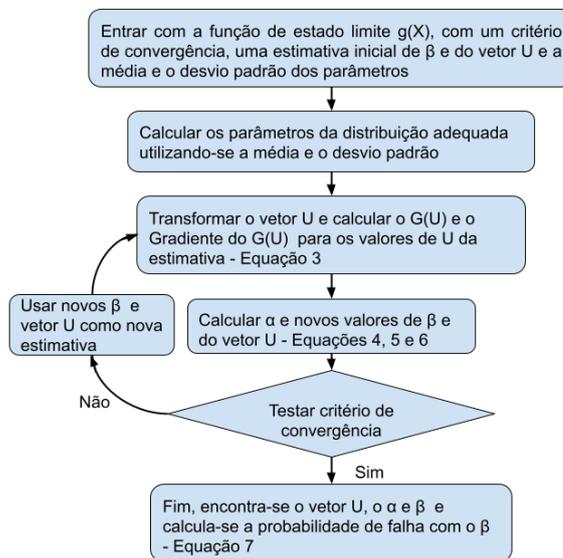


Figura 1 - Fluxograma da implementação do FORM

### SORM

O SORM (*Second Order Reliability Method*) foi proposto inicialmente por Fiessler, Neumann e Rackwitz (1979), e posteriormente modificado por Breitung (1984) e por Madsen, Krenk e Lind (1986). Esse método é similar ao FORM, porém, utilizando a expansão de segunda ordem da série de Taylor, no intuito de se obter um método mais preciso que o FORM. A sua implementação segue conforme o fluxograma da Figura 2. As equações 8 a 11, citadas no fluxograma são:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 g(U)}{\partial U_i \partial U_j} \quad (9)$$

$$A_{ij} = \frac{(RDR^T)_{ij}}{2|\nabla g(U^*)|}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (10)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) * [\det(I + 2\beta * A)]^{-1/2} \quad (11)$$

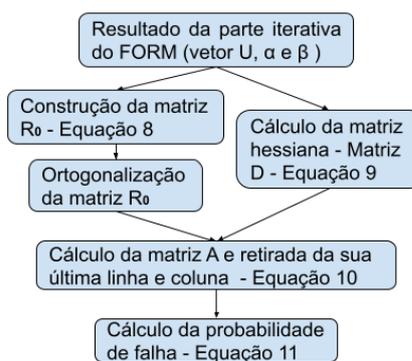


Figura 2 - Fluxograma da implementação do SORM

sendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $||\nabla g(U^*)||$ , os mesmos valores encontrados na resolução do FORM,  $det$ , a determinante da matriz entre parênteses,  $I$ , a matriz identidade do mesmo tamanho da matriz  $A$ , e  $\Phi$ , a função de distribuição cumulativa.

### Modificações na implementação do FORM e SORM

Em função da melhoria dos resultados obtidos com a utilização do FORM e SORM em comparação com os resultados do método de Monte Carlo, realizou-se modificações na implementação dos métodos desenvolvidos anteriormente a esta pesquisa.

No FORM, modificou-se um termo multiplicativo presente no cálculo do gradiente. Este termo está presente no final da implementação do gradiente, em que, após o cálculo das diferenças finitas, multiplicava-se o resultado pelo desvio padrão para correção das transformações feitas utilizando-se o *uma* transformação entre uma variável não-gaussiana em uma variável gaussiana. Porém, como dito por Howard (2002), utilizando-se essas transformações, as variáveis gaussianas e não-gaussianas ( $\mathbf{X}$  para  $\mathbf{U}$ ) possuem características estocásticas e probabilidades similares, logo, multiplicador pode ser aproximado para 1. A manutenção deste multiplicador pode levar a imprecisões nos métodos estudados.

No SORM, utilizou-se das mesmas modificações do FORM, além de também tirar a multiplicação do desvio padrão no cálculo da matriz Hessiana, pelo mesmo motivo citado anteriormente, visto que a matriz Hessiana é composta de derivadas parciais e que, com isso, também se utilizou nela a transformação das variáveis não-gaussiana  $\mathbf{X}$  para gaussianas  $\mathbf{U}$  e o método de diferenças finitas.

Por fim, a última modificação realizada no SORM, foi no processo de ortogonalização da matriz  $R_0$ . Com isso, além de realizar o cálculo da ortogonalização da matriz, transformou-se os vetores coluna da matriz em vetores ortonormais, ou seja, dividiu-se cada vetor pela própria norma.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Com as modificações feitas, aplicou-se novamente os métodos FORM e SORM no problema de falha em máquinas rotativas analisado em trabalhos anteriores. Esse problema consiste em um eixo biapoiado, girando a uma velocidade de rotação igual a 45 Hz, e que possui uma massa desbalanceada. Este problema foi resolvido utilizando-se o modelamento de Tuckmantel (2018). Para que seja possível comparar os novos resultados com os antigos (antes das modificações descritas), utilizou-se os mesmos parâmetros estocásticos, que são a excentricidade do desbalanceamento e a massa específica. Com isso, tem-se a comparação dos resultados, como mostra a Tabela 1, sendo  $P_f$  a probabilidade de falha.

**Tabela 1** - Comparação de resultados para o eixo desbalanceado

	<b>Pf do Monte Carlo (referência)</b>	<b>Pf do FORM</b>	<b>Pf do SORM</b>
<b>Resultados antigos</b>	13,1 %	10,1 %	10,1 %
<b>Tempos de processamento antigos</b>	8750,5 s	1898 s	1898 s
<b>Resultados novos</b>	13,1 %	14,05 %	12,87 %
<b>Tempos de processamento novos</b>	8750,5 s	93,93 s	2269,6 s

Observa-se com o Tabela 1, que os novos resultados estão mais próximos do resultado encontrado com o Monte Carlo (resultado de referência), sendo que agora, o resultado do FORM e do SORM não foram iguais. Com isso, a diferença entre o FORM e o SORM com o Monte Carlo passou a ser 0,95 % e 0,23%, respectivamente.

Além disso, a probabilidade de falha do FORM, encontrado com as novas mudanças, ficou um pouco mais distante do que o resultado do SORM, em relação à probabilidade de falha de Monte

Carlo. Porém, isto já era esperado, visto que o método SORM foi inicialmente criado para ser um método mais preciso do que o FORM.

Outro problema analisado foi a de uma viga biapoada sujeita a uma carga estática aplicado no ponto médio da viga. Além disso, considerou-se também o efeito do empenamento, conforme mostra a Figura 3. Para a sua análise, considerou-se como parâmetros estocásticos, o módulo de Elasticidade, a Força aplicada e o módulo do empenamento. Neste problema, realizaram-se duas análises, com dois valores de módulo de empenamento, sendo elas  $1 * 10^{-3}$  m e  $5 * 10^{-4}$  m. As médias do módulo de Elasticidade e da Força aplicada são, respectivamente, 200 Mpa e 100000 N. Para o desvio padrão, utilizou-se 10 % da média para a força aplicada e para o módulo do empenamento, e para o módulo de Elasticidade, utilizou-se 8% da média. Este problema foi resolvido utilizando-se o modelamento de Tuckmantel (2018).

Neste caso, analisou-se a sobreposição das incertezas da deflexão sofrida pela viga, sem o empenamento e com o empenamento, conforme mostra a Figura 4. As Figuras 5 e 6, mostram em detalhe essa sobreposição, mostrando a distribuição de probabilidade gerada pelo método de Monte Carlo em um ponto da viga, o ponto central, onde ocorre a aplicação da força, sobrepondo essas distribuições.

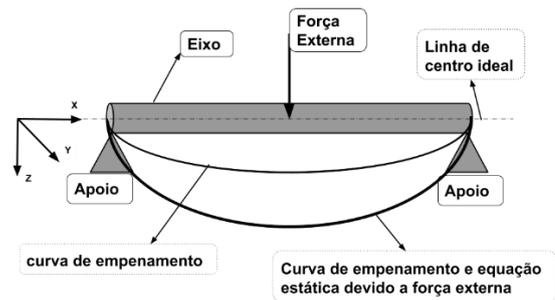


Figura 3 - Viga biapoada sob ação de uma força estática, considerando o efeito do empenamento

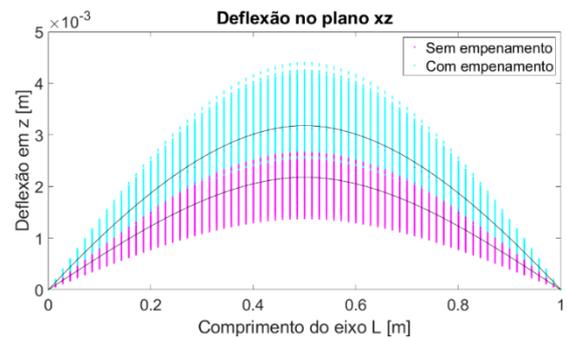


Figura 4 - Deflexão da viga com o módulo do empenamento igual a  $1e-3$  m

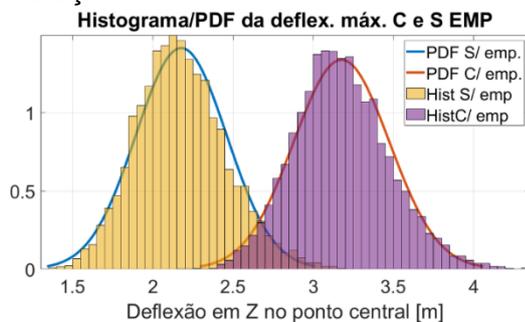


Figura 6 - Sobreposição da curva com e sem empenamento para o empenamento igual a  $1e-3$  m

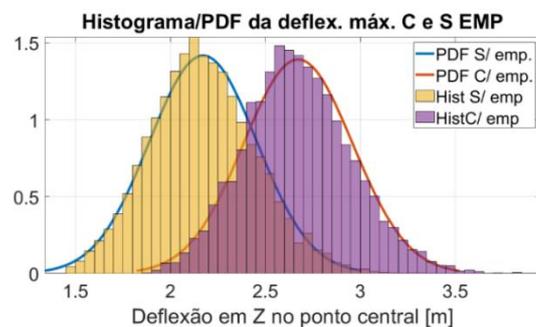


Figura 5 - Sobreposição da curva com e sem empenamento para o empenamento igual a  $5e-4$  m

Aplicando-se os 3 métodos, temos os seguintes resultados, mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados da sobreposição das curvas com e sem empenamento

Módulo do empenamento	Pb do Monte Carlo (referência)	Pb do FORM	Pb do SORM
$1 * 10^{-3}$ m	0,62 %	0,69 %	0,69 %
Tempo de processamento p/ $1 * 10^{-3}$ m	2509,92 s	0,0657 s	0,2204 s
$5 * 10^{-4}$ m	10,28 %	10,27 %	10,27 %
Tempo de processamento p/ $5 * 10^{-4}$ m	2446,76 s	0,0631 s	0,0693 s

Neste caso, essas probabilidades representam a probabilidade da curva sem empenamento, na verdade, estar empenada, ou a probabilidade da curva com empenamento, na verdade, não estar empenada, ou seja, ela mostra a probabilidade de se ter uma falsa constatação da condição de empenamento da curva. Esse tipo de análise mantém a ideia da função de estado limite, porém, o resultado obtido não é a probabilidade de falha.

Com isso, temos que, para o módulo de empenamento igual  $1 * 10^{-3}$  m, temos que a probabilidade da sem empenamento, estar empenada, ou da curva com empenamento, não estar empenado é igual a 0,62 %, pelo Monte Carlo, e igual a 0,69 %, pelo FORM e o SORM. Nota-se que os resultados foram próximos, mesmo para probabilidades bem baixas.

E para o módulo de empenamento igual  $5 * 10^{-4}$  m, temos que a probabilidade da sem empenamento, estar empenada, ou da curva com empenamento, não estar empenado é igual a 10,28 %, pelo Monte Carlo, e igual a 10,27 %, pelo FORM e o SORM. Nota-se que, para este caso em que as curvas estão mais próximas, e a probabilidade é maior, os resultados foram mais próximos.

## CONCLUSÕES:

Após a realização deste trabalho, pode-se concluir que as modificações realizadas no FORM e no SORM, para adquirir resultados mais compatíveis com os valores de referência, foram efetivas, podendo-se observar a sua melhora na Tabela 1. Além disso, pode-se concluir também que essa melhora permaneceu na nova análise realizada, em que, diferentemente dos problemas anteriores, analisou-se a probabilidade de se obter uma falsa análise de se estar com ou sem empenamento, conforme as suas incertezas. Por fim, pode-se concluir que os métodos FORM e SORM são bons métodos para essas análises, tendo uma precisão similar ao do Monte Carlo com um custo computacional menor.

---

## BIBLIOGRAFIA

- Breitung, K.** Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals, *Journal of Engineering Mechanics (ASME)* Vol. 110 No. 3, pp. 357-366, 1984.
- Fiessler, B., Neumann, H-J., and Rackwitz, R.** Quadratic limit states in structural reliability. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 105(4), 661–676, 1979.
- Garoli, G. Y., Visnadi, L. B., Castro, H. F.,** Validation of the generalized polynomial chaos expansion to approximate the stochastic frequency response of a multi-fault rotor, *13th International Conference on Dynamics of Rotating Machines*, 2019.
- Hasofer, A.M., Lind, N.C.** Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics division*, 100(1), 111–121, 1974.
- Howard, R. M.,** Principles of Random Signal Analysis and Low Noise Design: The Power Spectral Density and Its Applications, published online Wiley Online Library, 2002.
- Madsen, H. O., Krenk, S. and Lind, N. C.** *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- Rackwitz, R. and Fiessler, B.** Structural reliability under combined random load sequences, *Computers and Structures*, vol. 9, no. 5, pp. 489–494, 1978.
- Tuckmantel, F. W. S.** Análise de Modelo Numérico de Acoplamento de Disco Flexível, 2018. Tese de doutorado. Faculdade de Engenharia Mecânica. UNICAMP., p. 210, 2018.