Variedades Algébricas e Esquemas

Palavras-Chave: geometria algébrica, variedades, esquemas

Autores:
Guido Neulaender, Unicamp
Prof. Dr. Marcos Jardim (orientador), Unicamp

Introdução

Geometria Algébrica é uma área bastante tradicional da Matemática, mas com grande impacto nos problemas contemporâneos. Sua abordagem de transferir perguntas geométricas para algébricas, bem como o inverso, traz novas perspectivas à problemas antigos. Esse é o caso, por exemplo, da sua contribuição para a solução do Último Teorema de Fermat, cuja demonstração se baseia em um resultado de *curvas elípticas*.

Esta pesquisa consiste no estudo de duas classes de objetos típicos da área: as *variedades algébricas*, que podem ser informalmente definidas como zeros de polinômios; e os *esquemas*, os quais podemos interpretar como um espaço associado ao espectro de algum anel. Foca-se, em especial, nas construções sobre um corpo k algebricamente fechado, mas muitas definições e resultados também se aplicam à outros corpos. Quando não mencionado o contrário, todas as figuras são esboçadas sobre $\mathbb{R}$ para construir intuição geométrica de k.

As variedades algébricas

Em primeiro lugar, precisamos explicar o que queremos dizer com "zeros". Dizemos que um subconjunto $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ do *espaço afim* [1] é um *conjunto algébrico* se existe um subconjunto de polinômios $T \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $Y = Z(T)$, onde

$$Z(T) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \forall f \in T\}.$$

Nesse caso, dizemos que Y é "zero"do conjunto de polinômios T.

Dado $\{f_\alpha\}$ família em T e $\{g_\alpha\}$ família em $k[x_1, \ldots, x_n]$ com apenas finitos $g_\alpha \neq 0$, para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in Y$, temos que

$$(\sum_\alpha f_\alpha g_\alpha)(a_1, \ldots, a_n) = \sum_\alpha f_\alpha(a_1, \ldots, a_n) g_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \sum_\alpha 0 \cdot g_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Logo, Y não é apenas o conjunto de zeros de T, mas de todo o ideal (T) gerado por T.

Analogamente, dado um subconjunto $Y \in \mathbb{A}^n$ qualquer, definimos o conjunto

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(P) = 0, \forall P \in Y\}$$

chamado *ideal* de Y. Temos que $Z(I(Y)) = Y$, como esperado; entretanto, se $\mathfrak{a} \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ é um ideal, então $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ é o seu radical [2]. Obtemos, assim, nossa primeira relação entre o espaço afim $\mathbb{A}^n$ e o anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\{\text{ideais radicais de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \underset{I}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} \{\text{conjuntos algébricos de } \mathbb{A}^n\}.$$

[1] $\mathbb{A}^n_k$ (ou apenas $\mathbb{A}^n$) é o conjunto das n-uplas $(a_1, \ldots, a_n)$ com entradas $a_i \in k$, $1 \leq i \leq n$

[2] $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f^d \in \mathfrak{a} \text{ para algum } d \geq 1\}$

No caso $n = 1$, o conjunto $Z(T)$ nada mais é que a intersecção das raízes dos polinômios em $T \subset k[x]$, as quais também podemos interpretar como pontos isolados na *reta afim* $\mathbb{A}^1$. Por exemplo, o polinômio $f(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ possui zeros $Z(f) = \{-1, +1\}$ representados na Figura 1. Perceba que f é redutível em $(x-1)$ e $(x+1)$ e que, na verdade, seu conjunto algébrico pode ser pensando como a união das raízes desses outros dois polinômios: $Z(f) = \{-1, +1\} = \{-1\} \cup \{+1\} = Z(x+1) \cup Z(x-1)$.

Figura 1: Zeros de $f(x) = x^2 - 1$

Na verdade, a união de quaisquer dois conjuntos algébricos é sempre um conjunto algébrico $(Z(T_1) \bigcup Z(T_2) = Z(T_1 T_2))$, assim como a intersecção de qualquer família desses conjuntos $(\bigcap Z(T_\alpha) = Z(\bigcup T_\alpha))$; ambos $\mathbb{A}^n$ e $\emptyset$ são também conjuntos algébricos, uma vez que $\mathbb{A}^n = Z(0)$ e $\emptyset = Z(1)$. Dessa forma, podemos definir uma topologia no espaço $\mathbb{A}^n$, chamada *Topologia de Zariski*: seus abertos são complementos de conjuntos algébricos, de forma que a intersecção finita e união arbitrária são sempre abertos pelas leis de De Morgan, bem como $\mathbb{A}^n$ e $\emptyset$ (um é o complemento do outro).

Voltando ao caso da reta afim $\mathbb{A}^1$, todo conjunto algébrico $Y \subset \mathbb{A}^1$ é da forma

$$Y = \bigcap_{f \in T} Z(f) = \bigcap_{f \in T} \{x \in k \,|\, f(x) = a(x - x_1) \ldots (x - x_n) = 0\} = \bigcap_{f \in T} \{x_1, \ldots, x_n\}$$

e como cada conjunto $Z(f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(f \neq 0)$ é finito, Y é também finito. Como os únicos conjuntos fechados próprios de $\mathbb{A}^1$ são finitos, a união de dois desses conjuntos nunca pode se igualar à $\mathbb{A}^1 = k$, que é infinito (k é algebricamente fechado); logo, $\mathbb{A}^1$ é irredutível [3].

Os conjuntos algébricos irredutíveis possuem um papel fundamental na Geometria Algébrica, motivo pelo qual recebem um nome especial: são chamados uma *variedade algébrica afim* ou apenas *variedade afim*. Um aberto nesse conjuntos é chamado uma *variedade quasi-afim*.

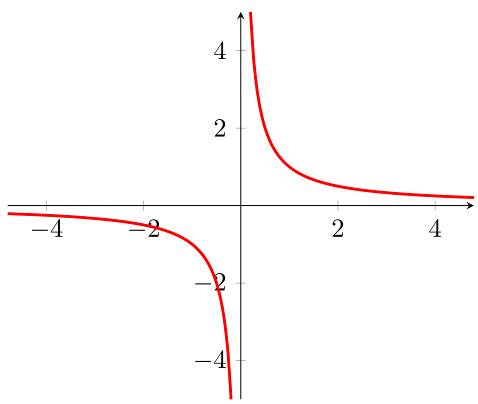

Figura 2: $xy - 1 = 0$

A cônica representada na Figura 2 é um exemplo de uma variedade afim em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Embora $Y = Z(xy - 1)$ pareça decomponível em

$$\{(x, y) \,|y = 1/x, x < 0\} \cup \{(x, y) \,|y = 1/x, x > 0\}$$

pela topologia natural de $\mathbb{R}^2$, o mesmo não acontece na topologia natural do plano afim. Isto, pois sabemos que Y é também zero do ideal $\mathfrak{p} = (xy - 1)$, que é *primo* [4]. Se supormos que $Z(p) = Y_1 \cup Y_2$, então $\mathfrak{p} = I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$ (pois um polinômio f é zerado por toda a união $Y_1 \cup Y_2$ se, e somente se, for zerado por ambos Y_1 e Y_2). Como Y_1, Y_2 são fechados próprios, podemos encontrar ao menos um polinômio $f \in I(Y_1) \setminus I(Y_2)$ e $g \in I(Y_2) \setminus I(Y_1)$, de forma que $fg \in I(Y_1) \cap I(Y_2) = \mathfrak{p}$ pelas propriedades de ideal, mas ambos $f, g \notin \mathfrak{p}$, o que é uma contradição. Logo, $Y = Z(\mathfrak{p})$ não pode ser redutível.

Perceba que a demonstração acima não depende da escolha do nosso ideal primo $\mathfrak{p}$. Ela nos garante que $Z(\mathfrak{p})$ é sempre irredutível na topologia de Zariski. De forma equivalente, podemos provar que o ideal de uma variedade algébrica afim é sempre primo, descrevendo uma segunda relação entre o espaço $\mathbb{A}^n$ e os ideais do anel de polinômios:

$$\{\text{ideais primos de } k[x_1, \ldots, x_n]\} \underset{I}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} \{\text{variedades algébricas de } \mathbb{A}^n\}.$$

[3]um espaço topológico X é dito *redutível* se existem fechados próprios $Y_1, Y_2 \subset X$ tais que $X = Y_1 \cup Y_2$. X é dito *irredutível* se não é redutível.

[4]um ideal $\mathfrak{p}$ é dito primo se quando $fg \in \mathfrak{p}$, então $f \in \mathfrak{p}$ ou $g \in \mathfrak{p}$

Funções regulares e morfismos

Assim como fazemos na Topologia, gostaríamos de entender quando duas variedades são equivalentes, i.e., quanto existe um mapa bijetivo entre elas que preserve a sua estrutura. Para isso, precisamos definir o que queremos dizer com morfismo entre variedades e temos duas exigências para tais: (1) queremos que nossos mapas sejam contínuos em nossa topologia; e (2) que a imagem de uma variedade seja sempre uma variedade. Ocorre que tais exigências são satisfeitas quando olhamos para as funções regulares das nossas variedades.

Dado aberto X numa variedade, definimos: uma função f é regular no ponto $P \in X$ se existir um aberto $U \subset X$ e polinômios $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$, com $h \neq 0$ em U, tais que $f = g/h$ em U. Em outras palavras, exigimos que o mapa $U \subset X \to \mathbb{A}^1 = k$, $Q \mapsto f(Q) = g(Q)/h(Q)$ seja bem definido numa vizinhança de P. Dizemos que f é regular em X se for regular em todo ponto de X; o conjunto dessas funções tem estrutura de anel, chamado *anel das funções regulares em X* e denotado $\mathcal{O}(X)$.

Assim, definimos um morfismo entre variedades X, Y por $\varphi : X \to Y$ mapa contínuo tal que, para todo aberto $V \subset Y$ e função regular $f : V \to k$, a composição $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$ é regular. Temos que a composição de dois morfismos é sempre um morfismo e, portanto, podemos falar agora de uma *categoria* [5] de variedades algébricas. Vale ressaltar que os objetos dessa categorias não são apenas as variedades afins, mas também as variedades quasi-afins além das *variedades projetivas* e *quasi-projetivas*. Essas duas últimas são associadas à zeros de polinômio *homogêneos* e representáveis no *espaço projetivo* $\mathbb{P}^n$. Embora sejam tão relevantes à Geometria Algébrica quanto o caso afim, não serão tratadas nesse texto.

$$\begin{tikzcd} X \supset \varphi^{-1}(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & V \subset Y \arrow[d, "f"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Um isomorfismo é um morfismo que admite um morfismo inverso $\psi : Y \to X$ de forma que $\psi \circ \varphi = id_X$ e $\varphi \circ \psi = id_Y$. Nessa categoria, todo isomorfismo é uma função bijetiva e bicontínua, mas nem todo morfismo bijetivo e bicontínuo é um isomorfismo.

Perceba que todo morfismo de variedades $\varphi : X \to Y$ induz um morfismo $\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, $(f : V \to k) \mapsto (f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k)$, entre seus anéis de funções regulares, de forma que duas variedades são isomorfas se, e somente se, seus anéis de funções regulares são isomorfos (como k-álgebras). Isso, na linguagem da teoria de categorias, significa que existe um *funtor contravariante* [6] $F : \mathsf{Var} \to \mathsf{kAlg}$ da categorias de variedades algébricas para a categoria de k-álgebras.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{O}(X) \\ Y \arrow[r, "F"] & \mathcal{O}(Y) \arrow[u, "F(\varphi) = \widetilde{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

No caso particular de uma variedade afim Y, seu anel de funções regulares $\mathcal{O}(Y)$ é isomorfo ao anel quociente $A(Y) := k[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$, chamado *anel de coordenadas afim* de Y, que, do fato que $I(Y)$ é ideal primo, sabemos se tratar de um domínio integral finitamente gerado. Na realidade, todo domínio integral finitamente gerado pode ser escrito na forma $A(Y)$ e associado à uma variedade afim. Dessa forma, quando restringimos F às variedades afins, obtemos, de fato, uma equivalência entre essas duas categorias.

[5] uma *categoria* consiste em três informações: uma classe de objetos (por exemplo, grupos, anéis, topologias, etc.); para cada par de objetos X, Y, uma classe de morfismos $Hom(X, Y)$ entre esses objetos (por exemplo, homomorfismos ou mapas contínuos); e dado $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos, uma composição $g \circ f : X \to Z$.

[6] um *funtor covariante* é um mapa $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ entre duas categorias que associa a cada objeto $C \in \mathsf{C}$ um objeto $F(C) \in \mathsf{D}$; a cada morfismo $f \in Hom(X, Y)$ de C, um morfismo $F(f) \in Hom(F(X), F(Y))$ em D; e é compatível com a composição $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Um funtor *contravariante* inverte o sentido dos morfismos na categorias de chegada, i.e., o morfismo $f \in Hom(X, Y)$ de C é mapeado para $F(f) \in Hom(F(Y), F(X))$ em D.

Resultados

Usando dos métodos mencionados, podemos determinar em vários casos quando duas variedades são ou não isomorfas. Alguns exemplos que ilustram o uso dessas técnicas, em especial do resultado da equivalência entre a categorias das variedades afins e domínios integrais finitamente gerados, se encontram abaixo.

Exemplo 1

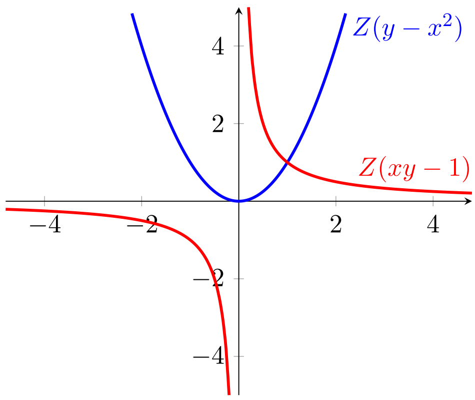

Figura 3: Curvas $y - x^2 = 0$ e $xy - 1 = 0$

Sabemos que as variedades $X = Z(y - x^2)$ e $Y = Z(xy - 1)$ representadas na Figura 3 não são isomorfas. Isso, pois o anel de coordenadas $A(X)$ de X é

$$A(X) = k[x, y]/(y - x^2) \cong k[x, x^2] \cong k[x]$$

i.e., é isomorfo à $k[x]$. Por outro lado, o anel de coordenadas de Y

$$A(Y) = k[x, y]/(xy - 1) \cong k\left[x, \frac{1}{x}\right] \cong k[x]_x$$

é isomorfo à localização $k[x]_x$. Nesse caso, $k[x] \subset k[x]_x$ é um subanel próprio e portanto esses anéis não são isomorfos, o que implica que X e Y não podem ser isomorfos como variedades.

Exemplo 2

Para um exemplo de um morfismo bijetivo e bicontínuo, mas que não é isomorfismo, tome o morfismo

$$\varphi : X = \mathbb{A}^1 \to Y \subset \mathbb{A}^2, \, t \mapsto (t^2, t^3)$$

onde $Y = Z(y^2 - x^3)$, representado na Figura 4. Esse morfismo é claramente bijetivo e bicontínuo pois possui inversa contínua

$$\varphi^{-1} : Y \to \mathbb{A}^1, \, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

porém, seu morfismo de anéis induzido $\widetilde{\varphi} : A(Y) \to k[t]$ não é isomorfismo: vemos que

$$\widetilde{\varphi}(x)(t^2, t^3) = (x \circ \varphi)(t^2, t^3) = x(t^2) = t^2$$

e, de forma equivalente,

$$\widetilde{\varphi}(y)(t^2, t^3) = (y \circ \varphi)(t^2, t^3) = y(t^3) = t^3$$

i.e., $x \mapsto t^2$ e $y \mapsto t^3$; logo, $t \notin Im(\widetilde{\varphi})$ e portanto esse mapa não é sobrejetivo. Como todo isomorfismo de variedades afim induz um isomorfismo de seus anéis de coordenadas, φ não pode ser isomorfismo.

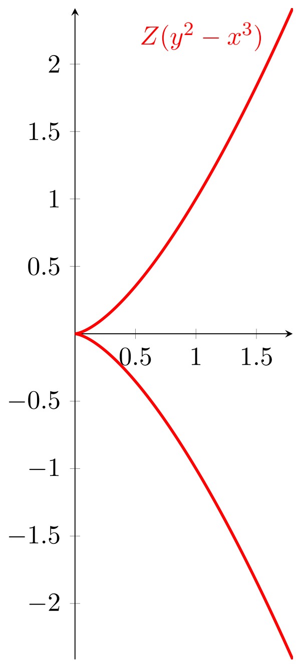

Figura 4: Curva (t^2, t^3)

Discussão

As variedades algébricas são, de certa forma, o primeiro grande objeto de estudo da Geometria Algébrica. Entendê-las por completo (i.e., classificar todas as variedades a menos de isomorfismo) significaria entender todas as soluções de sistemas de polinômios, tanto no espaço afim quanto no espaço projetivo. Assim como nas demais áreas da Matemática, um problema de tamanha complexidade como esse é melhor compreendido quando repartido em problemas menores, que podem ser estudados com ferramentas mais específicas.

Comparando novamente com a Topologia, podemos começar procurando uma equivalência mais "fraca"que o isomorfismo, assim como é o caso das homotopias. Nas variedades, uma possibilidade é olhar para mapas mais locais, chamados *mapas racionais.* Nesse caso, exigimos apenas que nossos mapas preservem as estruturas das *funções racionais* de uma variedade, que formam um corpo. Obtemos assim uma relação de equivalência que exigi apenas que duas variedades possuam um aberto isomorfo. Um exemplo é a reta afim $\mathbb{A}^1$ e o circulo unitário $Y = Z(x^2+y^2-1)$, uma vez que $Y \setminus \{(0,1)\} \cong \mathbb{A}^1$ (Figura 5). Claramente, duas variedades isomorfas são birracionalmente equivalentes, mas nem todo mapa birracional é isomorfismo.

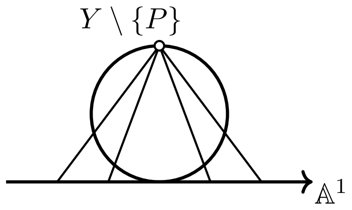

Figura 5: Projeção esferográfica de Y em $\mathbb{A}^1$

As variedades, de certa forma, também apresentam alguns problemas que gostaríamos de "corrigir". Em primeiro lugar, não possuímos a principio uma ferramente para diferenciar os zeros de $Z(x) \cap Z(y)$ e $Z(x) \cap Z(y - x^2)$, esboçados na Figura 6, embora entendamos intuitivamente que o segundo caso apresenta certa multiplicidade.

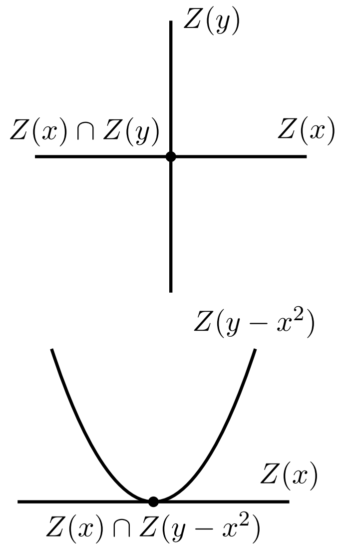

Figura 6: Exemplo de multiplicidade

Gostaríamos, também, de poder estudar a geometria de anéis mais gerais, como $\mathbb{R}[x]$ ou mesmo $\mathbb{Z}[x]$, mas tais objetos não se "comportam bem"com nossa construção, que apresenta uma certa dependência das propriedades de k ser corpo e algebricamente fechado. Por exemplo, todo ponto da reta afim $a \in \mathbb{A}^1_k$ é unicamente associado à um ideal maximal $\mathfrak{m}_a = (x - a)$ em $k[x]$ e vice-versa; porém, o ideal maximal $(x^2 + 1) \subset \mathbb{R}[x]$ não possui nenhum zero em $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

Esses são alguns motivos que motivaram a construção dos *esquemas*, objetos geométricos mais gerais que as variedades e que nos permitem pensar o espectro (i.e., conjunto de todos os ideais primos) de qualquer anel (comutativo com unidade) como um espaço topológico munido de um *feixe.*

Referências

[1] Andreas Gathmann. *Algebraic Geometry.* 2019. URL: `https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2019/alggeom-2019.pdf` (acedido em 06/06/2021).

[2] Ulrich Görtz e Torsten Wedhorn. *Schemes with examples and exercises.* 1st edition. Vol. 1. Algebraic geometry. OCLC: 845804377. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010. ISBN: 978-3-8348-0676-5.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* 14ª ed. Graduate texts in mathematics 52. OCLC: 946087219. New York, NY: Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-90244-9.