Classificação de curvas projetivas

Palavras-Chave: Álgebra, Curvas algébricas, Teorema de Bezout

Autores/as:

Matheus de Matos Lana Yankous -Unicamp

Prof.º Dr./º Marcos Benevenuto Jardim (orientador) -Unicamp

INTRODUÇÃO: A principal intenção desta iniciação científica foi proporcionar uma introdução ampla e rigorosa à geometria algébrica, disciplina normalmente não abordada nos cursos de graduação. Para isso, foram necessários maiores conhecimentos em áreas como: álgebra comutativa, geometria plana e analítica, álgebra linear, e outras.

Essas matérias serviram de base para o progresso natural dentro do projeto, que culminaria na classificação de curvas projetivas. Devido ao alto grau de generalização e dificuldade das demais curvas, foi optado por classificar curvas projetivas de graus 2 e 3, além da relação de curvas racionais e irredutíveis de forma geral.

METODOLOGIA:

Ao longo do projeto, o aluno conduziu estudos individuais com encontros com o orientador semanalmente para discussão e apresentação de um seminário sobre um assunto definido por alguém do grupo dos alunos que compartilhavam o mesmo orientador. Em particular, este aluno fez duas apresentações: "Classificação de curvas projetivas de grau 3" e "Variedades determinantais".

O estudo inicial se concentrou em curvas já bem conhecidas e relativamente simples, como as curvas vistas em geometria analítica: elipses e parábolas. Estas são definidas por equações em duas variáveis. A eclipse, por exemplo, é da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sendo a e b constantes e x e y variáveis. Estas curvas são mais elementares e já foram introduzidas em matérias comuns da graduação, como geometria analítica e álgebra linear.

Uma vez entendidos os métodos e propriedades destas primeiras curvas, o progresso natural era a generalização. Para isso, um estudo mais rigoroso de variedades e conjuntos algébricos foi necessário.

Para um espaço afim A^n em um em um corpo K algebricamente fechado, para uma família f_i de polinômios no anel de polinômios em K, o subconjunto V = $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \; f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \;\; \forall\, i = 1, \dots, m\}$ de todos os pontos $(x_1, \dots, x_n)$ que anulam simultaneamente todos os polinômios f_i é uma variedade algébrica afim se, além desta definição, o conjunto V não puder ser decomposto em dois subconjuntos disjuntos. Analogamente, nestas condições, se o espaço for projetivo, é uma variedade algébrica projetiva. Nas variedades afins por exemplo, podemos definir uma topologia. No caso, a topologia de Zariski, ferramenta muito importante e muitas vezes utilizada.

Em seguida, foi visto a multiplicidade de interseção. Existem pelo menos 3 definições conhecidas (e equivalentes) para este conceito. O foco foi a definição apresentada por [6]. Seja L uma reta e F uma curva de grau d. Suponha que L=X. Podemos decompor F(0,Y,Z) $= \prod(z_iY - y_iZ)^{m_i}$. Este expoente m_i é a multiplicidade de interseção de X e F em dado ponto P=(0:y:z). Mais geralmente, excluindo os casos em que o ponto P está na reta L, e esta está em F e o caso em que P não está em L ou em F, este é o índice de interseção. Por fim, a multiplicidade de F em P é o inteiro m tal que para toda reta L passando por P vale que $m\_i \geq$ m.As definições para os casos afim e projetivo são muito semelhantes. Estas definições são de suma importância e nos levarão ao Teorema de Bezout.

Antes, porém, foi necessário aprofundar em álgebra comutativa. Coisas como ideais, módulos, produtos tensoriais e suas propriedades foram importantes, não apenas para o que vinha imediatamente em seguida, o Teorema de Bezout, mas a todo o restante da IC.

O Teorema de Bezout é um dos mais importantes resultados envolvendo curvas algébricas e nos diz o seguinte:" Se F,G são curvas planas projetivas sem componente em comum, então o número de pontos na interseção de F e G, contados com multiplicidade, é igual ao produto dos graus de F e G.[6]

Este teorema nos diz, por exemplo, que há no máximo 3 pontos distintos na interseção de uma reta e uma cúbica no plano projetivo. Uma aplicação importante do teorema de Bezout é o chamado Teorema de Pascal: Dados seis pontos A, B, C, D, E e F sobre uma circunferência, que não precisam ser diferentes, as interseções de AB e DE; BC e EF; CD e F A são colineares.

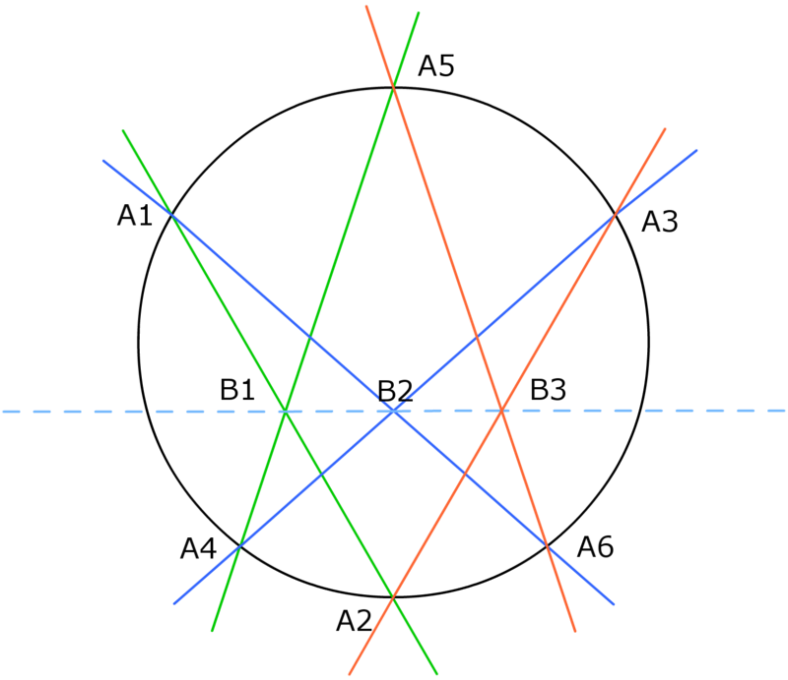

Figura 1-Ilustração do teorema de Pascal. Créditos :Por .jhc. - itwiki, Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7749241

Além disso, o teorema de Bezout é uma das mais importantes ferramentas na classificação de curvas. Por exemplo, valendo-se do Teorema de Bezout e feitas todas as hipóteses necessárias, prova-se que uma cúbica singular irredutível tem uma singularidade e é equivalente a uma das duas:

1.C=$\{x_2x_1^2 - x_0^3 - x_2x_0^2 = 0\}$

2.C=$\{x_2x_1^2 - x_0^3 = 0\}$

Caso a cúbica irredutível não seja singular, o resultado é ainda mais específico: ela será equivalente à apenas uma curva. A saber, C=$\{x_2^2x_3 - x_1(x_1 - x_3)(x_1 - ax_3) = 0\}$,com "a" constante e diferente de 0 e 1. Deste resultado segue, por exemplo, que toda cúbica não singular irredutível possui exatamente 9 pontos de inflexão.

Podemos ir um pouco além e classificar as curvas com a racionalidade como parâmetro. Mais precisamente, temos as definições:

Uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ é racional se $f = F/Q$ onde F e Q são polinômios constantes do anel de polinômios do corpo K com Q não nulo em todo o domínio.

Uma curva f é racional se $f(P) = \left(f_0(P), \dots, f_n(P)\right)$ sendo cada f_i uma função racional.

Usando a classificação de cúbicas e o Teorema de Bezout, chegamos que:

Uma cúbica irredutível é racional se, e somente se, é singular.

De forma geral, a intenção principal do projeto, classificação de curvas projetivas, foi atingida antes do prazo final. No tempo restante, tópicos adicionais foram desenvolvidos, como é o caso das variedades determinantais, um caso particular de variedades algébricas dentro da variedade das matrizes.

Vale mencionar por fim que, para o progresso natural na disciplina, foi estudado, de forma básica, teoria das categorias.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Os principais resultados da matéria, que se constituem em lemas, propriedades, teoremas e métodos, foram vistos e, em sua maioria, demonstrados. Em particular, um compilado curto, porém original, de resultados envolvendo classificação de cúbicas projetivas foi apresentado via seminário.

CONCLUSÕES:

Nesta iniciação científica o principal objetivo, um estudo introdutório da geometria algébrica, foi efetuado com sucesso.

Vários dos principais teoremas foram vistos e uma base sólida da matéria foi construída, de forma que possibilite estudos mais aprofundados no futuro.

Vale ressaltar por fim o desenvolvimento de várias matérias que não seriam vistas no currículo da graduação, como a álgebra comutativa.

BIBLIOGRAFIA

[1]-Gathmann,Andreas. Plane Algebraic Curves. Kaiserslautern, notas de aula (disponível online),2018

[2]-Gathmann,Andreas. Algebraic Geometry. Kaiserslautern, notas de aula (disponível online),2019

[3]-Igor R.,Shafarevich. Basic Algebraic Geometry, 3ª edição, Springer,2013

[4]-Igor R.,Shafarevich. Basic Algebraic Geometry 2, 3ª edição, Springer,2013

[5]-Hartshorne, Robin. Algebraic Geometry,8ª edição, Springer,1997

[6]-Vainsencher, Israel. Introdução às Curvas Algébricas Planas, 3ª edição, IMPA, 2009