A equação do calor unidimensional e bidimensional e aplicações

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Equação do calor, Equações parabólicas

Autores:
Francisco de Mello Calderaro IMECC - Unicamp
Prof.ª Dr.ª Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (orientadora) IMECC - Unicamp

---

Resumo para o XXIX Congresso de Iniciação Científica da Unicamp

Este projeto teve como objetivo estudar a equação do calor unidimensional e n-dimensional, em regiões limitadas com diferentes tipos de condição de contorno, bem como em todo o espaço. Para situações distintas foram estudadas existência e unicidade de solução, assim como outras propriedades de solução da equação do calor, como o Princípio do máximo, dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais e de contorno e regularidade.

Inicialmente, foi feito um estudo preliminar sobre séries de Fourier e suas propriedades, a saber, a definição da série de Fourier de uma função periódica, o Teorema de convergência pontual das séries de Fourier, bem como um teorema sobre convergência uniforme e os teoremas de integração e derivação termo a termo para essas séries.

Depois, foi realizado um estudo sobre equações diferenciais parciais (EDP's) e suas classificações, em particular, sobre os tipos de EDP's lineares de 2ª ordem com duas variáveis independentes, a saber, elíptica, parabólica e hiperbólica, e suas formas canônicas. Foi visto, em particular, que a equação do calor unidimensional é do tipo parabólica.

Com isso, encerram-se os estudos preliminares. Foi estudado, então, a dedução da equação do calor unidimensional, que é dada por

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t), \tag{1}$$

a partir das leis físicas que descrevem a difusão do calor e as mudanças de temperatura em um meio homogêneo. Na interpretação física da equação (1),

$u(x,t)$ representa a temperatura de uma barra à distância x da extremidade esquerda no instante t e a função $F(x,t)$ representa a ação de fontes e sorvedouros de calor na barra.

Em seguida, estudou-se o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) da equação do calor unidimensional, dado por

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x,t), \quad 0 < x < L, \ t > 0 \\ u(0,t) = g_1(t), \, u(L,t) = g_2(t), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases} . \tag{2}$$

A condição de fronteira do Problema 2 ($u(0,t) = g_1(t)$, $u(L,t) = g_2(t)$) é do tipo Dirichlet, foram estudados também os problemas com condição de fronteira do tipo Neumann, em que a condição é dada para u_x ao invés de u, e do tipo Robin, em que a condição é dada para $\beta u + u_x$. Para cada um destes problemas, foram calculadas soluções explícitas para o caso homogêneo com condição de fronteira homogênea, i.e, com $F = g_1 = g_2 \equiv 0$, provando, assim, a existência de solução desses problemas. Em particular, viu-se que a solução do Problema 2, no caso $F = g_1 = g_2 \equiv 0$ é dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Foi discutido também como utilizar o método da variação de parâmetros para calcular uma solução para o caso não-homogêneo a partir da solução conhecida do respectivo problema homogêneo.

Depois disso, foram estudadas outras propriedades de solução do Problema 2, a saber, o Princípio do máximo, unicidade, regularidade e a dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais e de contorno. Com isso, concluiu-se que o Problema 2 é "bem posto" no sentido de Jacques Hadamar, i.e, possui solução, a solução é única e depende continuamente dos dados iniciais e de fronteira.

Na segunda parte do projeto, estudou-se a equação do calor n-dimensional, i.e,

$$u_t - \Delta_x u = F(x,t),$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+^*$ e $\Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$. Para essa equação, foram estudados dois problemas. O problema de valor inicial, ou problema de Cauchy, que é dado por:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f, & em \ \ \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g, & em \ \ \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3}$$

Bem como o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF), dado por:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f, & em \ \ U_T \\ u = g, & em \ \ \Gamma_T, \end{cases} \tag{4}$$

onde $U_T := U \times (0,T]$, $\Gamma_T := \overline{U}_T \backslash U_T$ é a chamada fronteira parabólica de U_T e $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, tal que ∂U é de classe C^1.

No estudo do Problema 3, foram calculadas soluções para os casos homogêneo ($f \equiv 0$) e não-homogêneo com condição inicial nula ($g \equiv 0$), obtendo assim uma solução no caso geral.

Para isso, foi estudada a solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{||x||^2}{4t}}, & se\ t > 0 \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases} \tag{5}$$

Foi verificado que a solução fundamental de fato satisfaz a equação do calor em $\mathbb{R}^{n+1} - \{(0,0)\}$. Assim, procurou-se utilizar esta solução para obter uma função que também satisfaça a equação do calor, mas que se aproxime de g quando $t \to 0^+$. Chegou-se, dessa forma, à função

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy \tag{6}$$

como candidata a solução do PVI 3 homogêneo. Foi visto que, de fato, a função (6) é uma solução para esse problema.

Para calcular uma solução do Problema 3 no caso não-homogêneo com $g \equiv 0$, foi utilizado o Princípio de Duhamel, que afirma que um candidato a solução para este caso é dado por

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s) ds, \quad para\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,$$

onde $u(x,t;s)$ é uma solução do PVI 3 com instante inicial s e condição inicial $f(\cdot, s)$. Assim, usando a solução calculada anteriormente, com as devidas alterações, conclui-se que a função

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s) f(y,s) dy ds$$

é uma candidata a solução do problema considerado. Com efeito, foi visto que esta função é solução do Problema 3 não homogêneo com $g \equiv 0$.

Foi observado, então, que somando as soluções dos casos homogêneo e não-homogêneo com $g \equiv 0$, obtem-se uma solução para o caso geral, i.e, a função

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dy ds$$

é solução do Problema 3.

Ademais, foram estudadas propriedades de solução do Problema 3. Em particular, foi visto que este problema possui uma versão do Princípio do máximo e possui solução única sob certas condições. Esta propriedade de unicidade afirma que o Problema 3 possui no máximo uma solução u que satisfaça

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a\|x\|^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T),$$

para algum par de constantes positivas A, a.

Em seguida, foi considerado o Problema 4. Para esse problema, foram estudadas propriedades de solução, como uma fórmula de valor médio, o Princípio do máximo forte, unicidade, regularidade e dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais e de contorno.

Dentre essas propriedades, vale ressaltar o Princípio do máximo forte, uma vez que importantes propriedades, como a unicidade e a dependência contínua, podem ser obtidas como consequência desse princípio, enunciado a seguir.

Teorema 1 (Princípio do Máximo Forte para a equação do calor) *Seja $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ uma solução do Problema 4 com $f \equiv 0$.*

(i) *Então, $\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$.*

(ii) *Se, além disso, U for conexo e existir um ponto $(x_0, t_0) \in U_T$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U}_T} u$, então u é constante em $\overline{U}_{t_0}$.*

Por fim, foram estudadas também uma demonstração de unicidade via método de energia e a propriedade de unicidade "backward", conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 2 (Unicidade "backward") *Sejam $t_0 \in (0,T]$ e u_1, $u_2 \in C^2(\overline{U}_T)$ soluções de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f, & \text{em } U_T \\ u = g, & \text{sobre } \partial U \times [0, t_0]. \end{cases} \tag{7}$$

Se $u_1(x, t_0) = u_2(x, t_0)$ para todo $x \in U$, então $u_1 \equiv u_2$ em $U_{t_0} := U \times (0, t_0]$.

Bibliografia

[1] BIANCONI, Ricardo. **Séries de Fourier**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/mat/2456/arquivos/Fourier.pdf . Acesso em: 17 ago. 2020.

[2] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, 1998.

[3] LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1: Funções de uma variável**. 8ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[4] MAGALHÃES, Paulo Marcelo Dias de. **Introdução às equações diferenciais parciais**. Disponível em: http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap1.pdf . Acesso em: 1 set. 2020 .

[5] MAGALHÃES, Paulo Marcelo Dias de. **A Equação do Calor**. Disponível em: http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap2.pdf . Acesso em: 12 out. 2020.

[6] MASSA, Eugenio Tommaso. **Equações Diferenciais Parciais**. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/eugenio/edp/globedp.pdf . Acesso em: 06 nov. 2020.

[7] PASSOS, Rokenedy Lima. **Séries de Fourier e o Teorema de Equidistribuição de Weyl**. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/6497/1/ROKENEDY_LIMA_PASSOS.pdf . Acesso em: 24 ago. 2020.

[8] SANTOS, Fabiano J. **Introdução às Séries de Fourier**. Disponível em: http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf . Acesso em: 17 ago. 2020.

[9] SIMON, Ricardo de A. **EDP's Lineares de 2ª Ordem**. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/ricardoalmeida/ensino/calculo-4b/equacoes-diferenciais-parciais/06_EDPL2aOrdem.pdf/view . Acesso em: 24 ago. 2020.