Equação da onda unidimensional e n-dimensional e aplicações

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Equação da onda, Equações hiperbólicas

Autores/as:
Vítor Misso Unicamp
Prof.ª Dr.ª Bianca Morelli Rodolfo Calsavara (orientadora) Unicamp

Resumo para o XXIX Congresso {Virtual} de Iniciação Científica da Unicamp

São várias as áreas nas quais as equações diferenciais possuem aplicações. Por exemplo, física, engenharias, biologia, entre outros. Muitos dos fenômenos dessas áreas têm seus comportamentos descritos matematicamente por meio de equações diferenciais. Neste projeto, o fenômeno estudado foi a onda nos casos unidimensional e n-dimensional.

Na primeira parte foi realizado um estudo preliminar sobre Séries de Fourier.

Em seguida, foram estudadas as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, podendo ser elas dos tipos hiperbólico, parabólico ou elíptico. A equação da onda unidimensional é do tipo hiperbólico.

Foi visto que a equação da onda unidimensional é dada por

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x,t)\,,$$

onde c é a velocidade de propagação da onda e $F(x,t)$ toda força externa.

Na sequência, foi estudado o problema da o caso da corda **infinita**. Tomando o problema de Cauchy da corda infinita homogênea:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ \ -\infty < x < +\infty, \ \ t > 0\,, \\ u(x,0) = \phi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ \ -\infty < x < +\infty\,. \end{cases} \tag{1}$$

Uma transformação linear que leva ao arquétipo hiperbólico $u_{xy} = \phi(x, y, u, u_x, u_y)$ foi realizada e chegou-se na solução para o problema, dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds\right], \tag{2}$$

onde ϕ é de classe C^2 e ψ é de classe C^1 em $\mathbb{R}$. A equação (2) é chamada fórmula de D'Alembert e é solução única do problema de Cauchy para dadas condições iniciais.

Após o caso acima, foi tratado o caso da equação da onda em uma corda **finita** de comprimento L preso nas extremidades, cujo problema é :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ \ 0 \le x \le L\,, \ t \ge 0\,, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0\,, \\ u(x,0) = \phi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x)\,, \ 0 \le x \le L\,. \end{cases} \tag{3}$$

No sistema acima, $\phi(0) = \phi(L) = 0$, $\psi(0) = \psi(L) = 0$, pois as extremidades estão presas. E que cuja solução é uma superposição do problema com velocidade inicial nula ($\psi(x) = 0$) e de problema com posição inicial na posição de equilíbrio, mas com velocidade inicial diferente de zero. As soluções dos dois problemas citados são encontradas por meio do Método da Separação de Variáveis. A solução de (3) é dada então por

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi ct}{L}\right) + k_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi ct}{L}\right);$$

onde

$$c_m = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \ k_m = \frac{2}{m\pi c}\int_0^L \psi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \ m = 1, 2, \ldots.$$

A segunda parte deste trabalho foi iniciada com uma abordagem sucinta sobre a equação do transporte e da equação da onda unidimensional. Foi vista uma maneira diferente de obter a fórmula de D'Alembert através das soluções da equação do transporte homogênea e não homogênea.

Como parte dessa abordagem breve sobre a equação da onda unidimensional, foi vista uma aplicação da equação de D'Alembert, o problema da semirreta real positiva.

Além disso, foi estudada a existência da solução da equação no caso n-dimensional. Tome $n \geq 2$, $m \geq 2$ e $u \in C^m\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right)$ solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = \phi,\ u_t = \psi, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4}$$

O problema (4) é o problema de Cauchy da onda n-dimensional.

Nesse estudo, os casos foram separados em quatro: a equação da onda tridimensional, bidimensional, em dimensões ímpares e em dimensões pares. Primeiramente, a solução do caso tridimensional foi encontrada pelo método das médias esféricas e, utilizando o método da descida, foi encontrada a solução do caso bidimensional.

Foi visto que para $n = 3$, ou seja, supondo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ resolve o problema de Cauchy (3), a solução do caso tridimensional é dada por

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} D\phi(y)\left(\frac{y-x}{t}\right) + \phi(y) + t\psi(y)dS(y), \tag{5}$$

onde $x \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$. Essa é a fórmula de Kirchhoff para o PVI (4) com $n = 3$.

Dessa forma, para encontrar a solução do caso bidimensional, considera-se um problema auxiliar tridimensional com a terceira variável espacial nula e utiliza-se a fórmula (5) como ponto de partida. Usando a definição de média na esfera e pela fórmula da Coarea, é possível simplifcar a expressão obtida com a fórmula (5) com a terceira variável espacial nula e a solução da equação da onda bidimensional é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B(x,t} \frac{t\phi(y) + t^2\psi(y) + tD\phi(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}dy, \tag{6}$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Essa é a fórmula de Poisson para o PVI (4) com $n = 2$.

De forma similar, é possível obter a solução para os casos em dimensões ímpares utilizando o método das médias esféricas, dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} \phi dS\right)\right) \\ & + \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(x,t)} \psi dS\right), \end{aligned} \tag{7}$$

onde n é ímpar e $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ t \geq 0$.

E também para os casos em dimensões pares utilizando o método da descida, dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B(x,t)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}dy\right)\right) \\ &+ \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B(x,t)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}dy\right), \end{aligned} \tag{8}$$

onde n é par e $\gamma_n = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.

Na sequência, foi estudada a solução para o caso não homogêneo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = 0, \ \text{ em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{9}$$

A solução de (9) foi obtida através do princípio de Duhamel. Dessa forma, a solução é dada por

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)ds, \tag{10}$$

onde u é a solução da equação da onda homogênea e para $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < s < t$ dados, para um s fixo, $u(x,t) = u(x,t;s)$ é solução do mesmo PVI de (4), mas com tempo inicial substituído por $t = s$.

Também foi visto que há unicidade da solução da equação da onda, tanto no caso unidimensional, quanto no caso n-dimensional, utilizando o método de energia. Além disso, foram estudados os conceitos de domínio de dependência em ambos os casos.

Bibliografia

BIANCONI, R. **Séries de Fourier**. Instituto de Matemática e Estatística, USP. 2016. `https://www.ime.usp.br/mat/2456/arquivos/Fourier.pdf`. Download em 17/08/2020

EVANS, C. L. **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in Mathematics. v.19. 1.ed. American Mathematical Society: 1998.

HOLETZ, M. S. **Método de Fourier para a resolução de Problemas de Valores Inicial e de Fronteira para a Equação do Calor**. Trabalho de conclusão de curso (Matamática Habilitação em Licenciatura) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Deparatamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, p.102. 2001. https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97166/Melissa_Samanta_Holets.PDF?sequence=1. Download em 24/08/2020

LIMA, E. L. **Análise Real volume 1. Funções de uma variável**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MAGALHÃES, P. M. D. **A Equação da Onda**. http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap3.pdf. Download em 14/10/2020.

MAGALHÃES, P. M. D. **Introdução as Equações Diferenciais Parciais**. http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edp-cap1.pdf. Download em 31/08/2020.

MASSA, E. T. **Equações Diferenciais Parciais**. São Paulo: USP. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Departamento de Matemática, 2014. https://sites.icmc.usp.br/eugenio/edp/globedp.pdf. Download em 31/08/2020.

ROQUE, A. **Física II – Ondas, Fluidos e Termodinâmica**. USP – Aula 16 http://sisne.org/Disciplinas/Grad/Fisica2FisMed/aula16.pdf. Download em 05/10/2020.

SANTOS, F. J. **Introdução às Séries de Fourier**. PUC Minas, 2004. http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf. Download em 17/08/2020

VALLE M. E. **Aula 26 Separação de Variáveis e a Equação da Onda**. MA311 - Cálculo III: Departamento de Matemática Aplicada Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula26.pdf. Download em 19/10/2020.