Soluções periódicas para equações diferenciais contínuas por partes

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Ciclos limite, Sistemas quadráticos

Autores/as:
BEATRIZ BENATTI DA ROCHA E SILVA [UNICAMP]
Prof. Dr. RICARDO MIRANDA MARTINS (orientador/a) [UNICAMP]

Introdução

No ano de 1900, Hilbert propôs uma lista de 10 problemas cuja solução deveria ser encontrada durante todo o século XX. Dentre eles, estava o 16º Problema de Hilbert, que consistia em encontrar uma função H(n) que estabelece o maior número de órbitas periódicas isoladas encontradas em sistemas da forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_n(x,y) \\ \dot{y} &= Q_n(x,y) \end{aligned}$$

em que n é o grau dos polinômios P e Q.

Dentro dessa perspectiva, destaca-se o artigo 'Limit cycles for discontinuous quadratic differential systems with two zones' [1], desenvolvido por Jaume Llibre e Ana C. Mereu, publicado no Journal of Mathematical Analysis and Applications e disponível online em 2014, que serviu como objetivo da pesquisa em questão.

Objetivos

- Estudar métodos algébricos para obtenção de ciclos limite em sistemas planares suaves por partes;

- Analisar o artigo da referênca ADICIONE-ME;
- Propiciar um primeiro contato da estudante com a teoria de sistemas dinâmicos.

Metodologia

A metodologia consistiu em estudo teórico a partir de fontes bibliográficas fornnecidas pelo orientador, bem como a implementação dos casos no software Mathematica, dando ênfase à criação de exemplos da própria aluna a fim de verificar aprendizado. Quando necessárias, foram marcadas reuniões para discussão do tema abordado no momento, uma vez que o nível de dificuldade dos tópicos era gradativamente aumentado.

Resultados e Conclusão

Inicia-se o estudo a partir das closing equations em sistemas lineares contínuos por partes, com linha de descontinuidade em $x = 1$. Em suma, considere ϕ_A, ϕ_B os fluxos dos campos A e B á esquerda e direita, respectivamente. Dados pontos $p \in x = 1$ e $\phi_A^{t_1}(p) \in x = 1$, diferente de p, o objetivo seria obter $\phi_B^{t_2}(\phi_A^{t_1}(p)) = p$.
Então, segue-se para os sistemas que possuem uma integral[2][3]: uma função escalar é considerada uma Integral para um campo vetorial qualquer $\dot{x} = f(x)$ se seu valor for constante em trajetórias, i.e.:

$$\dot{I}(x) = \nabla I(x) \circ \dot{x} = \nabla I(x) \circ f(x) = 0$$

A vantagem dessas equações é que o campo originado pela função integral constituem o retrato de fase do sistema.
Em seguida, tomamos sistemas com ciclos de curvas algébricas[4]:

Definição 1. *Tome o sistema*

$$\dot{x} = P(x, y),\ \dot{y} = Q(x, y)$$

bem como $f \in \mathbb{R}[x, y]$, i.e., f é um polinômio nas variáveis x e y. A curva algébrica $f(x, y) = 0$ é dita uma curva algébrica invariante do sistema polinomial de equações diferenciais se, para algum polinômio $K(x, y)$, nós temos:

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf$$

caso as condições de existência sejam satisfeitas, o polinômio f é ciclo limite do sistema.

Ademais, prossegue-se para os ciclos limites obtidos de uma bifurcação de Hopf[5], focado na presença de um parâmetro no interior da equação e no comportamento do sistema conforme seu valor. Destaca-se, assim , o teorema que garante a existência de um ciclo limite:

Teorema 1. *(Hopf): Dado um sistema:*

$$\dot{x} = f_\mu = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g_\mu = g(x, y)$$

Com parâmetro μ e ponto fixo em $(0, 0)$ (outros resultados obtidos por translação). Tome também a matriz linearizada do sistema, de autovalores $\lambda_1, \lambda_2 = a(\mu) \pm ib(\mu)$ se para algum valor de μ (consideremo-lo igual a zero, sem perda de generalidade) o sistema satisfaz:

- *1.*
$$a(0) = 0, b(0) = \omega \neq 0, ondesgn[(\partial g_\mu/\partial x)|_{\mu=0}(0, 0)]$$

- *2.*
$$\frac{da(\mu)}{d\mu}|_{\mu=0} = d \neq 0$$

- *3.*$c \neq 0$*, onde*

$$c = \frac{1}{16}(f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy})+\frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx}+f_{yy})-g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}),$$

$$com\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial_x \partial_y}|_{\mu=0}(0, 0), etc.$$

Então há uma solução periódica para o sistema.

E enfim, prossegue-se para o encontro de soluções periódicas via Método da Média[6][7]. Considere o sistema T- periódico $\dot{x} = \epsilon f(x, t)$, $x \in D$, aberto de $\mathbb{R}$, $t \in [0, \infty]$, f de classe C^1. Diferentemente dos casos anteriores, o sistema é não-autônomo, o que torna sua resolução complicada. Para tanto, tomaremos a *média do comportamento* de t em f através da integral

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(y, t)dt$$

eliminando a dependência de t. Se, para $p \in D, f^0(p) = 0$ e $Df^0(p) = 0$, então para cada $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução T-periódica $x_\epsilon(t)$ do sistema tal que $x(t, \epsilon) \to p$ quando $\epsilon \to 0$, ou seja, uma aproximação precisa do retrato de fase do sistema original.

Referências

[1] LLIBRE, J; MEREU, A. C. Limit cycles for discontinuous quadratic differential systems with two zones, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 413, p. 763–775, 2014

[2] WIGGINS, Stephen. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. Segunda Edição. Springer, 2003.

[3] STROGATZ, Steven. **Nonlinear Dynamics and Chaos:With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.** Primeira edição. Perseus Books, 1994

[4] LLIBRE, Jaume; ZHAO, Yulin. Algebraic limit cycles in polynomial systems of differential equations. **Journal of Physics A Mathematical and Theoretical**. 2007

[5] MUÑOZ-ALICEA, **Roberto. Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem**. Colorado, 2011.

[6] MARTINS, R.M.; MEREU, A. C.; OLIVEIRA, R. D. S. An estimation for the number of limit cycles in a Liénard-like perturbation of a quadratic nonlinear center

[7] Martins, R.M.; MEREU, A.C; OLIVEIRA, R. D. S. **An estimation for the number of limit cycles in a Liénard-like perturbation of a quadratic nonlinear center**. Springer, 2014