

Modelos Cosmológicos em Duas Dimensões

Palavras-Chave: Modelos Cosmológicos, Jackiw-Teitelboim, Horava-Lifshitz

Autores/as:

Jefferson Monção da Silva - Unicamp

Prof. Dr. João Paulo Pitelli Manoel - Unicamp

INTRODUÇÃO:

Com o objetivo de introduzir o aluno ao estudo de cosmologia, desenvolvemos um projeto de iniciação científica onde estudamos modelos cosmológicos em duas dimensões. Modelos do espaço-tempo em duas dimensões funcionam como 'toy model' para dimensões maiores e, devido a simplificação matemática das equações envolvidas, o estudo de Modelos Cosmológicos bidimensionais é de interesse para a formulação de uma teoria de Gravitação-Quântica em maiores dimensões.

A gravitação em Duas Dimensões não é dinâmica devido a anulação do tensor de Einstein. Isto também se reflete no fato que a ação de Einstein-Hilbert em duas dimensões é um invariante topológico. Por isso a dinâmica deve ser reinserida partindo de alterações da ação.

O projeto se foca nos modelos de Jackiw-Teitelboim, cuja dinâmica é dada pela adição de um campo escalar chamado campo de Dilaton e no modelo de Horava-Lifshitz, onde um escalonamento anisotrópico e a quebra da simetria de Lorentz do espaço-tempo é responsável pela dinâmica da gravitação.

Foi mostrado no artigo [1], pelo orientador João Paulo Pitelli Manoel, que os

modelos de Jackiw-Teitelboim e o de Horava-Lifshitz dividem algumas características em comum, a proposta do projeto é estudar a natureza dessa relação.

METODOLOGIA:

Relatividade Geral Bidimensional:

A Gravitação em 4 dimensões é derivada da ação de Einstein Hilbert

$$S = \int R \sqrt{-g} d^4x ,$$

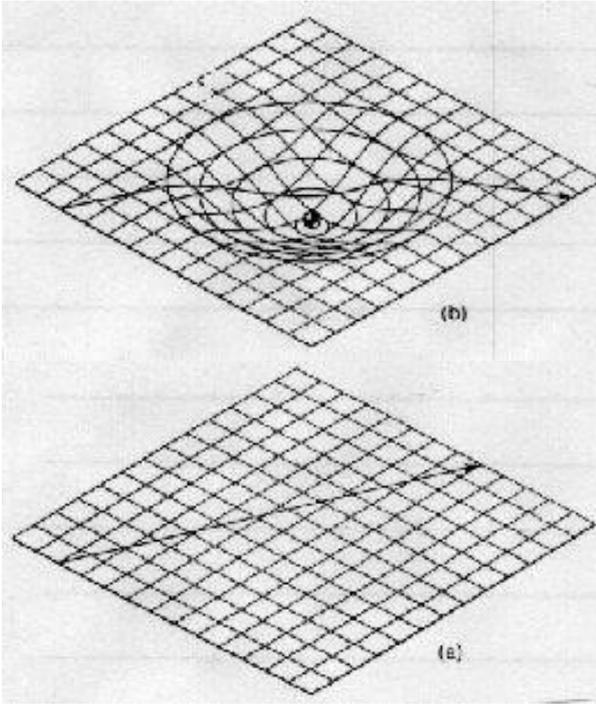
cuja variação em termos da *métrica* resulta nas Equações de Campo de Einstein (ECE)

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta}}{2}.$$

Então é definida a quantidade $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}$, chamada de tensor de Einstein, que está relacionada a curvatura do espaço-tempo.

As ECE formam um conjunto de equações diferenciais não lineares que relacionam a métrica $g_{\alpha\beta}$ e o tensor energia e momento $T_{\alpha\beta}$. De forma qualitativa, nas palavras de John Wheeler:

“Matter tells spacetime how to curve, and spacetime tells matter how to move.” [2] (A matéria diz para o espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo diz para a matéria como se mover.).



Imagens extraídas da referência [3], elas apresentam o espaço-tempo como uma superfície bidimensional que responde à presença de matéria. Na imagem (a) vemos como a trajetória de um raio de luz (representada pela seta preta) atravessa uma região onde não existe deformação no espaço-tempo devido a matéria e na imagem (b) o mesmo raio de luz atravessa próximo a um objeto massivo.

Contudo, como comentado na introdução, em duas dimensões as ECE não resultam em uma dinâmica para a métrica. Para ilustrar esse fato, vamos escolher um sistema de coordenadas tal que a métrica é diagonal [4]

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Definindo

$$F = 2AB \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right] - A \left[\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} \right] - B \left[\frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right],$$

Podemos calcular as quantidades geométricas da ECE em termo de F e teremos

$$R = \frac{-F}{2A^2B^2}$$

e

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{F}{4A^2B^2} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Portanto $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = 0$, o que implica na equação para a métrica

$$\Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{T_{\alpha\beta}}{2}.$$

Esta equação algébrica relaciona os elementos da métrica com os elementos do tensor energia-momento, porém não descreve um universo dinâmico [5].

Modelo de JT

Modelos cosmológicos em maiores dimensões com simetria esférica podem ser reduzidos ao caso de duas dimensões a partir de transformações conformes e acrescentando um campo escalar chamado campo de Dilaton [6].

O modelo cosmológico de Jackiw-Teitelboim (JT) é um modelo em duas dimensões com um campo de Dilaton e descrito pela seguinte ação

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} (\eta[R - \Lambda] + L_M).$$

A vantagem do modelo de JT é a proximidade com o universo em que vivemos. De fato, modelos com campo de Dilaton em duas dimensões mantem algumas estruturas de 4 dimensões, tal como solução de buracos negros e a radiação Hawking, como apontado na referência [7].

Modelo de HL

O modelo de Horava-Lifshitz introduz a dinâmica em duas dimensões através da quebra de Simetria de Lorentz (SL) devido ao seguinte reescalamento anisotrópico

$$t \rightarrow b^z t, x \rightarrow bx.$$

Este reescalamento torna t em uma coordenada singular e a teoria se torna não-invariante por difeomorfismos.

Devido a isso é necessária a decomposição **espaço + tempo** do formalismo ADM, que decompõe o espaço em superfícies de tempo constante.

A ação no modelo HL é dada por

$$S_{HL} = \int dt dx N(t) \sqrt{h_{11}} (L_K - L_V),$$

onde $N(t)$ é a função lapso e h_{11} é a métrica induzida na superfície, L_K é a parte cinética da ação e depende da curvatura extrínseca,

enquanto L_V é a parte potencial da ação e depende da constante cosmológica.

Estudos em Gravidade-Quântica no modelo de HL já foram feitos e o modelo mostrou diversos pontos atrativos, por exemplo a cosmologia quântica é unicamente determinada a partir das condições iniciais, o que pode ser visto na referência [8].

Aspectos da relação HL-JT

O projeto considerou a métrica homogênea e isotrópica do universo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRW) preenchido com um fluido perfeito com a equação estado $p = \omega\rho$. A métrica do espaço-tempo FRW é

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dx^2.$$

Nessa situação a ação de JT toma a seguinte forma

$$S_{JT} = - \int (\dot{\eta}\dot{a} + \eta\Lambda a + \eta^\gamma \rho a) d^2x,$$

onde foi assumido $\int_{\partial V} \eta \dot{a} dt = 0$ e $N(t) = 1$.

A matéria foi adicionada no modelo de JT com um acoplamento ao campo de Dilaton, o acoplamento é chamado de mínimo quando $\gamma = 0$ e conforme quando $\gamma = 1$.

A ação do modelo de HL assume a forma

$$S_{HL} = \int dt dx \left[(1 - \lambda) \frac{\dot{a}^2}{Na} + 2aN\Lambda + aNp \right],$$

e a matéria é adicionada a partir do formalismo de Schutz [9], para fluidos perfeitos no universo FRW. Nesse formalismo a equação para a pressão é a seguinte

$$p = \frac{\omega\mu^{1+\frac{1}{\omega}}}{(1+\omega)^{1+\frac{1}{\omega}}} e^{-\frac{S}{\omega}}.$$

onde S é a entropia específica do fluido e $\mu = \left(\frac{\phi + \theta S}{N}\right)$ é a entalpia específica.

A variação dessas duas ações retorna EDO's não-lineares de segunda ordem para o fator de escala de cada modelo.

A EDO do modelo de HL é escrita na seguinte forma

$$R = \tilde{\Lambda} + \tilde{\rho},$$

onde $\tilde{\Lambda} := \frac{2\Lambda}{1-\lambda}$ e $\tilde{\rho} := \frac{\omega-1}{1-\lambda}\rho$. A EDO obtida da variação de S_{JT} é semelhante à de HL

$$R = \Lambda + \rho.$$

Nas condições do universo FRW estabelecidas, temos $R = 2\frac{\ddot{a}}{a}$ e a densidade de energia ρ é escrita em função do fator de escala $a(t)$. Para o modelo de JT a densidade de energia é $\rho(t) = \frac{M}{a(t)^{\omega+1}}$, onde M é uma constante de integração. Já no modelo de HL a densidade de energia é $\rho(t) = \frac{p_T}{a(t)^{\omega+1}}$, onde p_T é uma constante que surge de uma transformação canônica no formalismo Hamiltoniano do modelo HL.

Os fatores de escala em cada modelo obedecem a mesma EDO se feita as seguintes transformações no modelo de JT

$$M \rightarrow \frac{\omega-1}{1-\lambda} p_T,$$

$$\Lambda \rightarrow \frac{2\Lambda}{1-\lambda}.$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

As lagrangianas de HL e de JT possuem termos cinéticos e termos potenciais, onde a parte cinética depende da derivada temporal de suas variáveis dinâmicas e a parte potencial só depende das variáveis dinâmicas.

No caso do modelo de HL a parte cinética é $K_{HL} = (1 - \lambda) \frac{\dot{a}^2}{Na}$, enquanto no modelo de JT a parte cinética é $K_{JT} = -\dot{\eta}\dot{a}$. Um aspecto do projeto foi relacionar as partes potenciais de modelos cosmológicos bidimensionais com partes cinéticas análogas as dos modelos de HL e JT. De modo geral as lagrangianas que queremos relacionar são da forma

$$\begin{cases} L_1 = \alpha \frac{\dot{a}^2}{Na} + V_1(N, a), \\ L_2 = \tilde{\alpha} \dot{\eta}\dot{a} + V_2(\eta, a) \end{cases},$$

onde α e $\tilde{\alpha}$ são constantes que multiplicam a parte cinética de cada lagrangiana.

Como resultado foi encontrada uma relação entre as partes potenciais das

lagrangianas para que o fator de escala descreva a mesma evolução temporal

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial V_2}{\partial \eta} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial V_1}{\partial N} + \alpha \frac{\partial V_1}{\partial a} \right).$$

As partes potenciais das lagrangianas dos modelos de JT e HL satisfazem essa relação, o que explica o fato de termos a mesma evolução temporal para o fator de escala.

Devemos estudar o efeito de difeomorfismos que alterem os fatores de escala dos modelos de JT e HL, i.e., $h(a_{JT}(t)) = a_{HL}(\phi(t))$.

Como discussão irei comparar uma solução do modelo JT para o caso de $\Lambda = 0$ e acoplamento conforme com as soluções do modelo HL com $\tilde{\Lambda} = 0$.

Caso $\Lambda = 0$ e $\omega = 0$

A solução do modelo JT apresentada na referência [10] para o acoplamento conforme é

$$a_{JT}(t) = \frac{M}{4} t^2 - b,$$

e a solução para o modelo de HL com $\tilde{\Lambda} = \Lambda = 0$ é

$$a_{HL}(t) = A + Bt - \frac{p_T}{2} t^2.$$

Portanto, como $M \rightarrow -\frac{p_T}{1-\lambda}$ basta uma reescala da variável t para transformar a solução do fator de escala de HL na solução em JT

$$a_{JT}(\alpha t + \beta) = -\frac{p_T}{4(1-\lambda)} (\alpha t + \beta)^2 - b.$$

De fato, a solução do fator de escala dos modelos é idêntica com a seguinte substituição $\alpha \rightarrow \sqrt{2(1-\lambda)}$, $\beta \rightarrow -\frac{\sqrt{2(1-\lambda)}}{p_T} B$ e $b \rightarrow -\frac{B^2}{2p_T} - A$. Portanto os dois modelos possuem muita semelhança, de forma que podemos estudar a evolução do universo no modelo de HL a partir das soluções no modelo de JT.

CONCLUSÕES:

O projeto se dedicou a estudar a relação entre dois modelos muito distintos. O modelo de JT e o modelo de HL. Como mencionando anteriormente os modelos possuem lagrangianas distintas e a dinâmica gravitacional em 2-dimensões é inserida nos modelos com diferentes variáveis dinâmicas.

Durante o projeto foi deduzida uma relação entre as partes potenciais das lagrangianas dos modelos para que os fatores de escala dos dois modelos tenham a mesma evolução temporal.

Como os modelos de JT e de HL possuem versões em maiores dimensões, nos perguntamos se nossos resultados podem ser generalizados para dimensões maiores. Pretendemos responder esta pergunta em um trabalho futuro.

Com isso, concluo que o projeto conseguiu atingir suas expectativas e, de fato, serviu como introdução à cosmologia. Além disso, tendo em vista a natureza da relação entre os modelos estudados, devemos continuar os estudos para os desdobramentos já mencionados acima.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.P.M. Pitelli, Cosmology in (1 + 1) - dimensional Hořava-Lifshitz theory of gravity, Physical Review D 93, 104024, 2016. arXiv:1509.04983 [gr-qc].
- [2] John Archibald Wheeler. Geons, Black Holes, and Quantum Foam. W. W. Norton and Company, 2000.
- [3] Ronaldo Carlotto Batista. Deflexão dos raios luminosos pelo campo gravitacional (usp.br), 2006.

- [4] Peter Collas. General Relativity in Two-dimensional and Three-Dimensional Space-Times. 1977.
- [5] Richard D. Mellinger Jr; Aspects of General Relativity in 1+1 Dimensions. California Polytechnic State University, San Luis Obispo, 2012.
- [6] J.P.M. Pitelli Quantum Cosmology in (1 + 1) -dimensional Hořava-Lifshitz theory of gravity, Phys. Rev. D 84 104024, 2016. arXiv:1605.01979 [gr-qc].
- [7] Steven B. Giddings e Andrew Strominger, Quantum theories of dilaton gravity, 1993.
- [8] P. Hořava, Quantum Gravity at a Lifshitz Point, Phys. Rev. D79, 084008, 2009. arXiv:0901.3775 [hep-th].
- [9] B. F. Schutz, Phys. Rev. D 2, 2762, 1970.
- [10] M. Cadoni e S. Mignemi, Cosmology of the Jackiw-Teitelboim Model, Gen. Rel.Grav.34, 2101, 2002. arXiv: 0202066 [gr-qc].