



## A Integração entre o Xadrez, a Matemática e a Computação

Adiel Teixeira Negrão

a265476@dac.unicamp.br

Orientadora: Profa. Dra. Priscila Cristina Berbert Rampazzo

Faculdade de Ciências Aplicadas

### RESUMO

Problemas de tomada de decisão têm sido o foco de pesquisas de diversas áreas de aplicação. Historicamente, os Jogos de Xadrez aparecem em questões sobre tomadas de decisão e já foram tema da pesquisa de inúmeros cientistas que, inspirados pelas estratégias do jogo, propuseram metodologias de análise e estratégia. Problemas combinatoriais como o Problema das Oito Rainhas e o Problema do Passeio do Cavalo apresentam um enorme espaço de possibilidades. Este projeto propõe abordar estes problemas com algoritmos baseados em heurísticas e meta-heurísticas, através de importantes estruturas matemáticas (matrizes e grafos). Os algoritmos propostos serão implementados em Linguagem Python.

**PALAVRAS CHAVE.** Xadrez, Grafos, Heurísticas e Algoritmos Genéticos.

### 1. Introdução

Os atributos dos Jogos de Xadrez tornaram-no particularmente apropriado para os cientistas que procuravam decifrar questões sobre tomadas de decisão [FREITAS, 2009]. Inúmeros pesquisadores de tomada de decisão trabalharam motivados por Jogos de Xadrez [FREITAS, 2009]: Alan Turing e Claude Shannon, pioneiros na criação da ciência cognitiva; Herbert Simon e Allen Newell propuseram o que mais tarde levaria à teoria da complexidade computacional; John von Neumann, com a Teoria dos Jogos, metodologia de Pesquisa Operacional na qual o resultado depende não só da estratégia de um agente e das condições do ambiente, mas também das estratégias escolhidas por outros agentes que possivelmente têm estratégias diferentes, mas objetivos comuns.

A maioria dos problemas que lidamos são de fácil solução e são classificados na Teoria da Complexidade como problemas de classe P (*Polynomial Time*), pois podem ser solucionados por meio de algoritmos determinísticos, cuja complexidade é determinada por um polinômio. Entretanto, alguns algoritmos pertencem a outra classe denominada de NP (*NonDeterministic Polynomial Time*). Em problemas para os quais não é conhecido um algoritmo que encontre uma solução em tempo polinomial, diz-se pertencer a classe NP, sendo considerados de difícil resolução. Os problemas pertencentes à classe NP-difícil (ou *NP-Hard*) incrementam uma séria dificuldade no desenvolvimento de algoritmos eficientes e que alcancem a solução. Normalmente possuem ordem de complexidade exponencial e não podem ser resolvidos em ordem de tempo polinomial. Nestes casos, é necessário abandonar a busca de uma solução ótima e simplesmente procurar uma solução de qualidade, através de procedimentos heurísticos.



Este projeto tem o objetivo de explorar dois dos principais problemas de tomada de decisão relacionados com o Jogo de Xadrez, ambos classificados como NP-difícil. O foco do projeto é multidisciplinar e considera a implementação de diferentes algoritmos. As propostas de algoritmos serão baseadas em heurísticas e meta-heurísticas, utilizando importantes estruturas matemáticas (matrizes e grafos) para representação de uma solução para estes problemas.

## 2. O Problema das Oito Rainhas

A rainha ou dama, tem o movimento em forma de asterisco, podendo movimentar-se por quantas casas quiser, de acordo com sua posição. O problema consiste em distribuir oito rainhas pelo tabuleiro sem que estas estejam interferindo na movimentação de cada uma. Pode-se trabalhar em diferentes proporções, mas assim como no Problema do Cavalo, é mais comum em um tabuleiro 8x8. Em estudos computacionais, pode-se resolver o problema utilizando métodos como: Algoritmos Genéticos, Programação por Restrições [Taha, 2007], Programação Lógica, além de um programa com Busca em Profundidade (*backtracking*); este último constrói árvores binárias de busca, utilizando uma linha da tabela por vez, gerando um método rápido de permutação.

## 3. Algoritmo Genético para o Problema das Oito Rainhas

Algoritmos Genéticos (AG) são procedimentos computacionais resultantes da aplicação de técnicas heurísticas [Eiben e Smith, 2015]. Os AG trabalham com uma população formada por um conjunto de indivíduos, ou seja, possíveis soluções para o problema. Durante as gerações, esta população é avaliada e o algoritmo se baseia na repetição da seguinte sequência básica: seleção de indivíduos de uma dada população, realização de reprodução com herança genética (*crossover*), introdução de variações aleatórias (mutação) e promoção de competição. Apesar de aleatória, a busca é direcionada, pois explora informações históricas para encontrar novas soluções. A hipótese deste método se baseia na premissa de que bons blocos de construção são passados de uma geração para outra e recombinados para formar soluções (indivíduos) cada vez melhores. Um AG foi proposto na busca por soluções para o Problema das Oito Rainhas. As próximas seções detalham a implementação computacional.

### 3.1. Codificação

Na implementação deste AG, um indivíduo será representado por uma lista de números inteiros, cada número da lista refere-se à posição de uma rainha (coluna ocupada no tabuleiro). A posição da linha é dada de forma crescente a partir da primeira e acompanha a posição do número na lista. Cada indivíduo é decodificado em um tabuleiro.

### 3.2. Avaliação - Função *fitness*

Uma função de avaliação permite atribuir a cada indivíduo um valor que é usado como medida de desempenho. Neste problema, a função que avalia o desempenho de um indivíduo deve contabilizar o número de rainhas que se atacam. A solução ótima para este problema apresentará zero colisões (*fitness* = 0).

### 3.3. Torneio Binário

Procedimento de seleção de indivíduos da população, onde os melhores são escolhidos através de seus respectivos *fitness*. Neste problema, buscam-se os que chegarem em *fitness* iguais a zero. A competição entre  $n$  indivíduos é realizada de forma aleatória, sendo que para o início do resultado da seleção, chamam-se de *pais* à esta geração, onde a próxima será denominada de *filhos* ou *descendentes*, assim sucessivamente para cada torneio realizado; por ser do tipo binário, tem-se que  $n = 2$ .

### 3.4. Crossover

Operador que seleciona os melhores pais para realizar uma combinação entre si, afim de gerar filhos que tenham soluções melhores que os indivíduos anteriores, sempre buscando manter a diversidade da população. O processo de *crossover* ocorre com a troca de genes (elementos que compõem um indivíduo) entre melhores pais, realizando-se através de pontos de corte (ponto(s) em que ocorrerá(ão) a separação de genes do indivíduo, classificando-se os pontos em: *1 corte*, *2 cortes* ou *n cortes*), desta forma, recombinando os genes de um pai com o outro. Pode-se também realizar a correção/reparação, tratando-se de um processo final que busca estabelecer soluções ainda mais precisas nos indivíduos, através da análise de genes, tendendo evitar restrições objetivas, como (em relação ao problema) alocar rainhas em colunas ou linhas iguais.

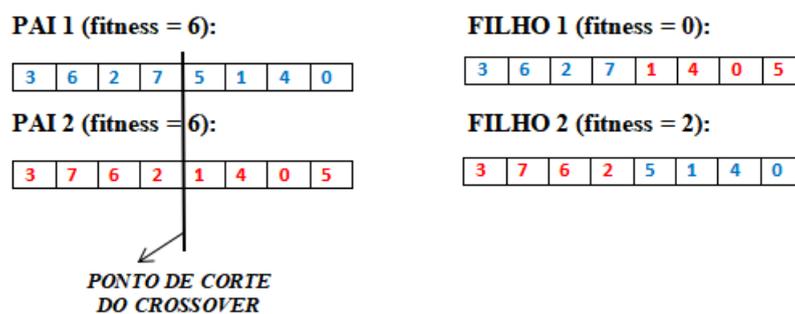


Figura 1: Exemplo de aplicabilidade do *Crossover*. Fonte: Autoral.

### 3.5. Mutação

Operador que realiza a alteração de algum(ns) gene(s) do indivíduo, de acordo com variações aleatórias. Este procedimento busca adicionar maior variedade dentro da população, podendo tornar o novo indivíduo (com mutação) melhor adaptado do que o anterior (sem o operador). Neste problema, será utilizada a mutação do tipo uniforme, tendo a função de selecionar um gene e o substituir aleatoriamente, conforme a Probabilidade de Mutação.



Figura 2: Exemplo de aplicabilidade da Mutação. Fonte: Autoral.

## 4. O Problema do Passeio do Cavalo

O cavalo é uma peça do jogo de xadrez que possui movimentação em forma da letra "L". O problema consiste em iniciar em alguma casa qualquer do tabuleiro 8x8 de xadrez e percorrer todas as casas, percorrendo todas estas apenas uma vez. Ou seja, em um tabuleiro 8x8, o cavalo percorrerá todas as 64 casas passando uma única vez por cada uma.

Com relação à matemática, existem 26.534.728.821.064 caminhos fechados direcionados em um tabuleiro 8x8, com o estudo de reflexões e rotações, e 9.862 caminhos fechados não direcionados em um tabuleiro 6x6. Para resolução computacional, pode-se utilizar alguns métodos,

como algoritmos de Força Bruta (desenvolvendo todas as possibilidades numéricas, uma forma bruta, por isso o nome) e por Redes Neurais (cada movimento é configurado como um neurônio). O algoritmo da Força Bruta é mais utilizado quando trata-se de problemas com delimitações, no caso do Problema do Passeio do Cavalo, essas limitações são dadas pelo tamanho do tabuleiro e da movimentação específica do cavalo. Está constantemente relacionado com permutações e combinações, afim de tratar a resolução enumerando todas as possibilidades possíveis das condições dadas ao problema. Um Algoritmo de Força Bruta foi implementado para a solução do Problema do Passeio do Cavalo.

### 5. Apresentação dos Resultados

Os algoritmos estão sendo implementados em Linguagem de Programação *Python*. O objetivo é que as ferramentas computacionais desenvolvidas no âmbito deste projeto possam ser utilizadas em atividades de ensino e integração entre o Xadrez, a Matemática e a Computação, através de táticas de desafios e jogadas enxadrísticas.

O código do Algoritmo Genético para o Problema das Oito Rainhas fora gerado com êxito, demonstrando o resultado para tabuleiro 8x8 (Figura 3) em questão de poucos segundos, também podendo ser implementado para um tabuleiro com dimensões maiores. O *fitness* do melhor indivíduo da população e da média de todos os indivíduos ao decorrer das gerações estão apresentados na Figura 3.

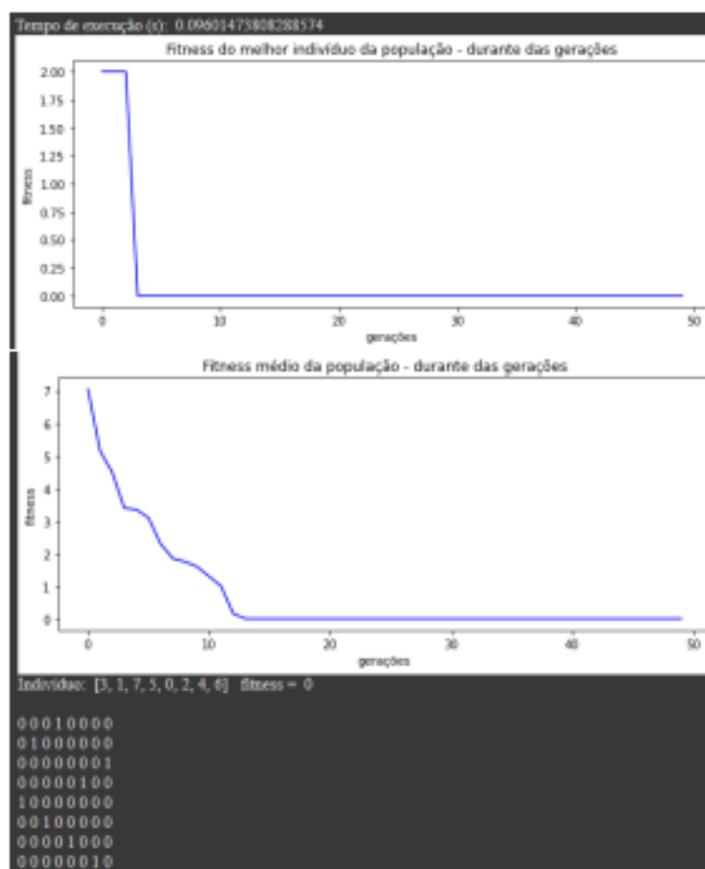


Figura 3: Resultado final do Algoritmo do Problema das Oito Rainhas. Fonte: Autoral.



Em relação ao Algoritmo do Problema do Passeio do Cavalo, fora desenvolvido um Algoritmo de Força Bruta, executado com êxito (Figura 4), tendo seu resultado demonstrado em um tabuleiro 8x8, também podendo ser realizado em um tabuleiro com maiores dimensões. O algoritmo ainda realiza a operação de abrir uma caixa de texto perguntando ao usuário a dimensão que deseja do tabuleiro, para realização do respectivo problema enxadrístico.

```
Qual a medida do tabuleiro? (Escolher apenas um número na digitacao, que seja <= 8, ex.: 8)
8
47 34 21 30 05 14 19 64
36 31 48 33 20 63 04 13
49 46 35 22 29 06 15 18
60 37 32 51 62 17 12 03
45 50 61 38 23 28 07 16
56 59 42 25 52 09 02 11
41 44 57 54 39 24 27 08
58 55 40 43 26 53 10 01
```

Figura 4: Resultado final do Algoritmo do Problema do Passeio do Cavalo. Fonte: Autoral.

## 6. Conclusão

O desenvolvimento de ambos os algoritmos proporciona a integração entre vertentes diversas no estudo acadêmico e profissional do desenvolvimento STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, traduzido para a língua portuguesa). Os estudos trouxeram resultados positivos, uma grande utilização de elementos ligados à Engenharia, tais como: tomada de decisão, otimização (combinatória), ferramentas para computacionais de desenvolvimento de projetos, resolução de problemáticas com agilidade e baixo custo, além de implementar aspectos de Metodologia de Projeto, disciplina da Engenharia de Manufatura.

Realizou-se também um estudo entre análises de tempo de resposta de ambos os algoritmos desenvolvidos, observando-se que ambos se comportam excelentes com tabuleiro 7x7, contendo resultados em menos de um segundo, porém quando abordado um tabuleiro 8x8, obtem-se uma respostas mais rápidas do Algoritmo Genético em relação ao Algoritmo de Força Bruta, com tempo de resposta de aproximadamente 1 segundo para o AG e 15 minutos para o de Força Bruta. A análise se estende com resultados rápidos para o Problema das Oito Rainhas até um tabuleiro 50x50, demorando aproximadamente 10 minutos, enquanto o algoritmo para o Problema do Passeio do Cavalo não suporta tamanha quantidade de casas. Tendo como conclusão a superioridade do AG em relação ao tempo computacional, explorando o espaço de busca para obtenção de uma solução de qualidade.

## Referências

- Eiben, A. e Smith, J. (2015). *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer, 2<sup>a</sup>ed. edition.
- FREITAS, A. E. T. D. A. (2009). Como tomadores de decisão experts percebem cenários complexos?
- Taha, H. A. (2007). *Pesquisa Operacional*. Pearson (Prentice Hall), São Paulo, 8<sup>a</sup>ed. edition.