

ANÁLISE LINEAR DE PLACAS DE KIRCHHOFF LAMINADAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

COMPÓSITOS LAMINADOS, PLACAS DE KIRCHHOFF, TENSÕES INTERLAMINARES.

Armando Italo de Paula Gonçalves [Unicamp]

Prof. Dr. Carlos Henrique Daros (orientador) [Unicamp]

INTRODUÇÃO:

Diversos projetos modernos de engenharia exigem o uso de materiais cujas propriedades somente são encontradas em compósitos, como os compósitos laminados reforçados com fibra unidirecional, aqui em estudo. Uma vez que, em geral, as aplicações dos laminados se dão em projetos de elevado custo computacional, em particular o Boeing 787 Dreamliner, mostrado na figura 1, motiva-se uma constante busca por simulações computacionais que, além de precisas, possuam rápido processamento, visando a redução do tempo e custo das simulações do projeto.

Nesse contexto, o presente trabalho propõe aplicar o Método dos Elementos Finitos (MEF), consagrado como um dos principais métodos de simulação computacional e amplamente usado na solução diversos problemas físicos, para a análise linear de placas finas laminadas, possuindo como base a teoria conhecida como Placas de Kirchhoff e utilizando elementos finitos de continuidade C3 que requerem um menor custo computacional, comparados aos de maiores continuidade da mesma família.

Dessa forma, essa pesquisa objetiva a programação de um algoritmo que, por meio de elementos finitos de baixo custo computacional, resolva linearmente os deslocamentos do plano médio e as tensões interlaminares de uma placa fina laminada simétrica, em que os resultados obtidos são validados pela solução analítica conhecida por 'Navier solution' proposta em Reddy (2004).

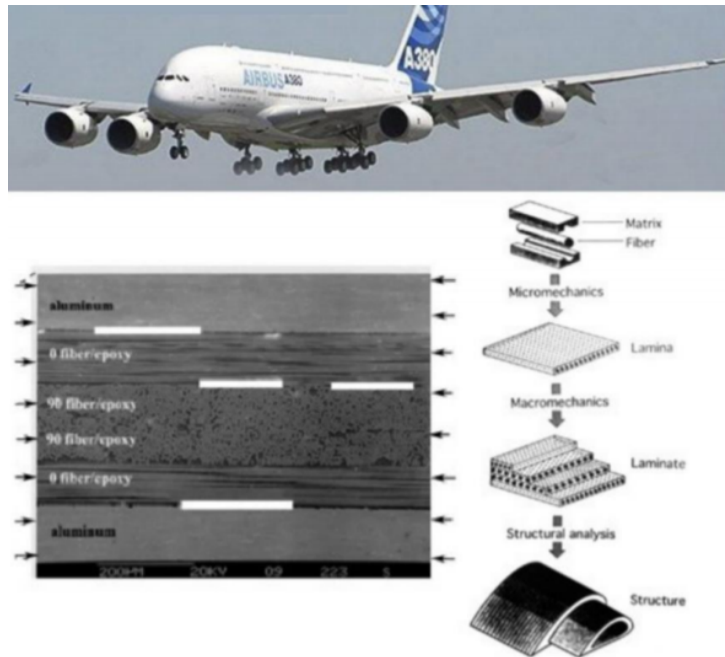


Figura 1: Seção transversal na estrutura primária de um Airbus A380 - fonte: [University of Aberdeen](#).

METODOLOGIA:

A fim de obter os campos de tensões interlaminares, é necessário um campo de deslocamento transversal de continuidade C4, assim, elementos finitos como os elementos polinomiais de Hermite de ordem superior (Bogner, Fox, Schmit, 1966), os quais possuem seis (elemento P6) ou nove (elemento P9)

graus de liberdade por nó e possuem continuidade C5, podem ser usados. No entanto, esses elementos podem ser complexos de implementar, uma vez que usam derivadas de ordem superior como curvaturas. Assim, como método alternativo, faz-se uso do elemento polinomial de Hermite P4, que utiliza polinômios de Hermite de terceira ordem, os quais, apesar de possuírem continuidade C3, apresentam excelente convergência, e para suprir a descontinuidade das derivadas de alta ordem, que são necessárias para se obter o campo de tensão, implementa-se o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Teoria Clássica das Placas Laminadas:

De acordo com Shames e Dym (1985), a Teoria Clássica das Placas Laminadas é uma extensão da Teoria Clássica das Placas (CPT) para compósitos laminados. Dessa forma, ela possui as mesmas hipóteses da CPT, além de que as camadas estão perfeitamente unidas. Ademais, restringe-se que o material é linearmente elástico, que cada camada possui espessura uniforme, que as tensões e deslocamentos são pequenos e que as tensões de cisalhamento transversal nas superfícies superior e inferior do laminado são nulas.

No presente trabalho, será considerada a flexão de placas simétricas ao plano xy que obedecem as especificações da Teoria Clássica das Placas Laminadas mencionadas, as quais possuem as equações de flexão desacoplada das equações de deslocamento da superfície central. Logo, como é mencionado em Reddy (2004), como as forças no plano xy forem zero, os deslocamentos nesse plano (u_0, v_0) também são nulos e o problema é reduzido a solução das tensões e deslocamentos relativos à flexão.

As equações constitutivas da teoria clássica das placas laminadas para laminados simétricos para a k -ésima camada, na ausência de forças no plano são dadas por Reddy (2004) como:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4(\phi) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + Q_{22} \sin^4(\phi) \quad (4)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + Q_{12}(\sin^4(\phi) + \cos^4(\phi)) \quad (5)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4(\phi) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + Q_{22} \cos^4(\phi) \quad (6)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\phi) \cos^3(\phi) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{22}) \sin^3(\phi) \cos(\phi) \quad (7)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\phi) \cos(\phi) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{22}) \sin(\phi) \cos^3(\phi) \quad (8)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + Q_{66}(\sin^4(\phi) + \cos^4(\phi)) \quad (9)$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (10)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (11)$$

As equações das tensões fora do plano, podem ser recuperadas por meio das equações de equilíbrio estático da placa, e são dadas por Patton. et al. (2021) como:

$$\tau_{xz}(z) = - \int_{\bar{z}}^z (\sigma_{x,x}(\zeta) + \tau_{xy,y}(\zeta)) d\zeta + \tau_{xz}(\bar{z}) \quad (12)$$

$$\tau_{yz}(z) = - \int_{\bar{z}}^z (\tau_{xy,x}(\zeta) + \sigma_{y,y}(\zeta)) d\zeta + \tau_{yz}(\bar{z}) \quad (13)$$

$$\sigma_{zz}(z) = \int_{\bar{z}}^z \left[\int_{\bar{z}}^{\zeta} (\sigma_{x,xx}(\xi) + \sigma_{y,yy}(\xi) + 2\tau_{xy,xy}(\xi)) d\xi \right] d\zeta - (z - \bar{z})(\tau_{xz,x}(\bar{z}) + \tau_{yz,y}(\bar{z})) + \sigma_{zz}(\bar{z}) \quad (14)$$

Elemento de Hermite P4

Conforme mencionado, os elementos finitos de Hermite P4 serão usados para descrever o problema, um elemento retangular, que possui quatro pontos nodais e com quatro possíveis deslocamentos nodais cada $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial x})$, localizados nos vértices do retângulo. O elemento utiliza polinômios de Hermite de terceira ordem para interpolar o deslocamento transversal $w(x,y)$ dentro do domínio do elemento. Os polinômios de Hermite para o elemento P4 e seus derivados são dados por Bogner, Fox e Schmit (1966). Para o P4, tem-se:

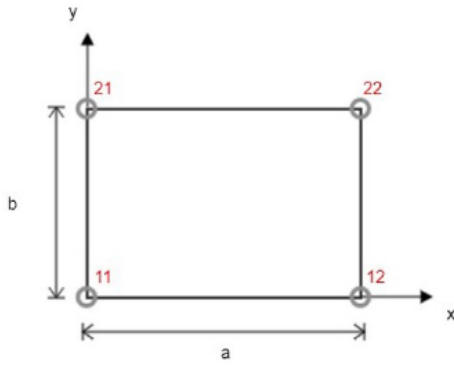


Figura 2: Elemento P4, com $a_1 = a$ e $a_2 = b$ e os nós ij sendo 11, 12, 22 e 21.

$$H_{01}^{1\gamma} = \frac{1}{a_\gamma^3}(2x_\gamma^3 - 3a_\gamma x_\gamma^2 + a_\gamma^3) \quad (15)$$

$$H_{02}^{1\gamma} = -\frac{1}{a_\gamma^3}(2x_\gamma^3 - 3a_\gamma x_\gamma^2) \quad (16)$$

$$H_{11}^{1\gamma} = -\frac{1}{a_\gamma^2}(x_\gamma^3 - 2a_\gamma x_\gamma^2 + a_\gamma^2) \quad (17)$$

$$H_{12}^{1\gamma} = -\frac{1}{a_\gamma^2}(x_\gamma^3 - a_\gamma x_\gamma^2) \quad (18)$$

Com $\gamma = 1, 2$ e a_1, a_2 sendo as dimensões do elemento ao longo do eixo das coordenadas locais x e y , respectivamente. Logo, o vetor de função de forma para o nó ij e a matriz de funções interpoladoras $[N]$ ficam:

$$[N] = \{H_{11}, H_{21}, H_{22}, H_{21}\}^T \quad (19) \quad H_{ij} = \{H_{0i}^{11} H_{0j}^{12}, H_{1i}^{11} H_{0j}^{12}, H_{0i}^{11} H_{1j}^{12}, H_{1i}^{11} H_{1j}^{12}\}^T \quad (20)$$

Assim, pode-se escrever o campo de deslocamento transversal como:

$$w(x, y) = [N] \{a\} \quad (21)$$

Modelagem dos Elementos Finitos:

A forma fraca associada a uma placa de Kirchhoff sob um carregamento uniformemente distribuído q_0 é deduzida por meio do Princípio de Trabalho Virtual e é dada em Shames e Dym (1985) por:

$$\int \int_A (\{\delta\epsilon\}^T \{M\} - q_0 \delta w(x, y)) dA \quad (22)$$

A partir das equações (22), (21) e usando L , como o operador matemático, tal que: $L[w(x, y)] = \{\epsilon\}$, obtém-se:

$$[K]^e \{a\}^e = \{q\}^e \quad (23)$$

$$[K]^e = \int \int_A [L(N)]^T [D] [L(N)] dA \quad (24)$$

$$\{q\}^e = \int \int_A [N] q_0 dA \quad (25)$$

Resultados

Nessa seção, são comparados os resultados analíticos e numéricos obtidos pelo algoritmo desenvolvido quando aplicado para resolver uma placa retangular laminada simétrica de Boron-Epoxy com três laminas de ângulos de orientação de fibra $\varphi = [0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$, comprimento de lados $a = b = 2\text{ m}$, espessura $h = 0,03\text{ m}$, carregamento de $q_0 = 1\text{ Pa}$, sob condição de contorno de apoio simples e propriedades de engenharia dados pela tabela 1. A malha utilizada no desenvolvimento do problema foi uma malha 3x3, com 9 elementos, como pode ser observada na figura 3.

E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}
204	185	5.59	0.23

Tabela 1: Propriedades do laminado de Boron-Epoxy

Visto que o domínio do problema em discussão é simétrico, como pode ser visto na figura 3, com o objetivo de se obter uma convergência mais rápida, apenas um quarto do domínio (quarto quadrante) é dividido em elementos finitos e processado.

Uma análise das condições de contorno do problema nos fornece que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ é zero na linha de simetria vertical;}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \text{ é zero sob a linha de simetria horizontal;}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ no apoio inferior;}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ no apoio direito.}$$

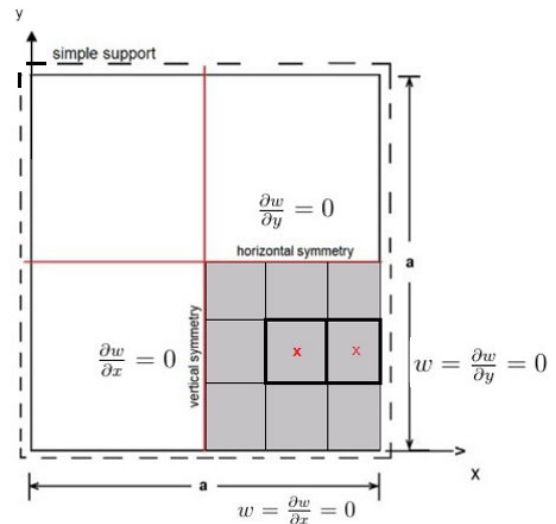


Figura 3: Modelagem do problema, com marcação "x" os centroides dos elementos que tem as tensões interlaminares expostas adiante.

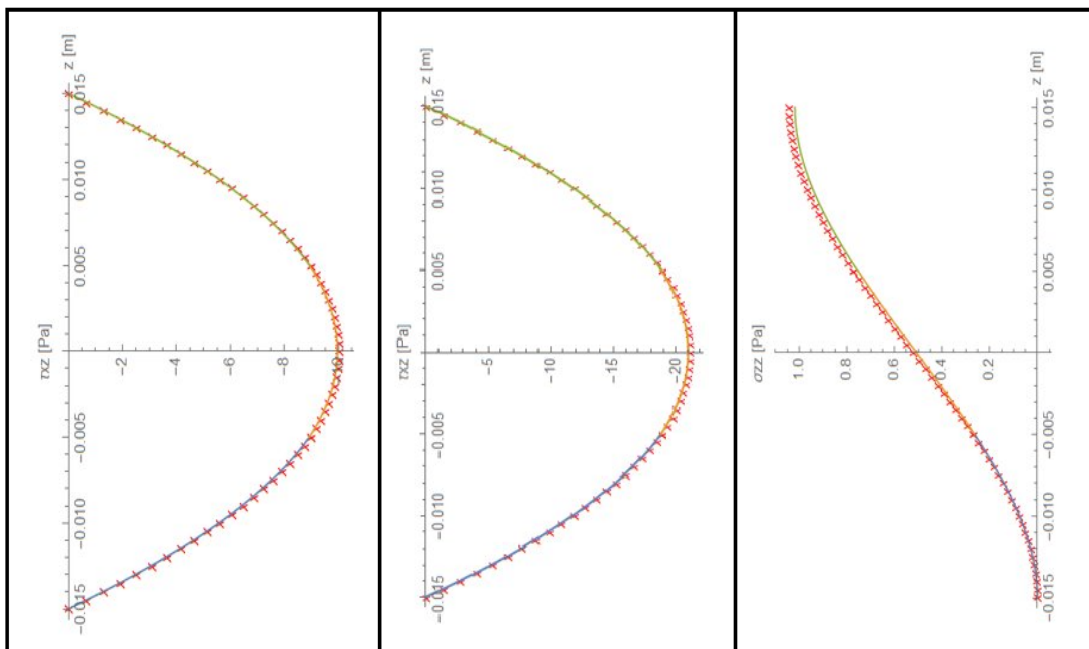


Figura 4: Tensões interlaminares ao longo de z na coordenada $x = 1.5$ e $y = 0.5$

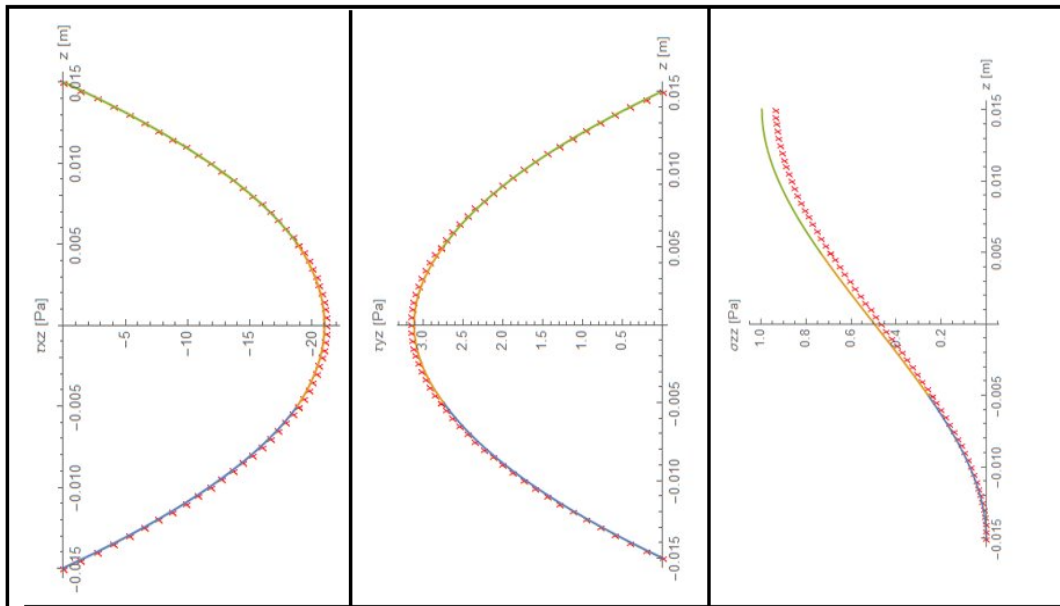


Figura 5: Tensões interlaminares ao longo da espessura da coordenada (1.5; 0.5)

Malha	Erro w (%)	Erro τ_{xz} (%)	Erro τ_{yz} (%)	Erro σ_{zz} (%)
3x3	0.03	0.6	0.7	2.5
9x9	$<10^{-4}$	0.07	0.09	1.5

Tabela 2: Erros relativos para o ponto (1.5; 0.5; 0) para 9 elementos (malha 3x3) e 81 elementos (malha 9x9).

CONCLUSÕES:

Como observado em resultados, a solução numérica obtida pelo Método dos Elementos Finitos, com pós-processamento com Método das Diferenças Finitas, apresenta uma satisfatória acuracidade, mesmo para uma malha pouco densa validando, além de apresentar boa convergência, como exposto na tabela 2, satisfazendo, portanto, o objetivo proposto.

BIBLIOGRAFIA

- Bogner, F. K., Fox, R. L., and Schmit, Jr. L. A. The generation of Inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. **Proceedings of the Eighth Japan-US Conference on Composite Materials**, p. 639-648, 1966.
- Patton, A. et al. Accurate equilibrium-based interlaminar stress recovery for isogeometriclaminated composite Kirchhoff plates. **Composite Structures**, v. 256, p. 1-15, 2021.
- Reddy, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. CRC Press, Boca Raton, 2004.
- Shames, I. H., and Dym, C. L. **Energy and finite element methods in structural mechanics**. CRC Press, Boca Raton, 1985.