XXIX Congresso de Iniciação Científica UNICAMP 2021

Tópicos de Processos Estocásticos

Palavras-chave: Passeio Aleatório Recorrência Funções Geradoras

Aluno: Vicenzo Bonasorte Reis Pereira [IMECC-Unicamp]

Orientador: Prof. Dr. Élcio Lebensztayn [IMECC-Unicamp]

1 Introdução

Processos estocásticos são sequências de variáveis aleatórias indexadas pelo tempo e representam o desenvolvimento de um processo aleatório. Por sua própria definição, têm um grande poder de modelagem, com aplicações em várias áreas, como Meteorologia, Engenharias, Biologia e Ciências Sociais. Uma das principais classes de processos estocásticos são as cadeias de Markov, em que o desenvolvimento futuro do processo depende apenas do momento atual. Este trabalho se concentra em estudar uma formulação clássica de cadeias de Markov, o Passeio Aleatório Simples.

2 Passeio Aleatório

Definição 1. *Considere $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição dada por*

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1) = p, \quad p \in [0,1], \quad i \geq 1.$$

Defina $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ para $n \geq 1$. A sequência de variáveis aleatórias $\{S_n\}_{n\geq 0}$ é um passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$, começando em 0. O passeio aleatório é chamado de simples, pois o tamanho dos saltos se restringe ao conjunto $\{-1, +1\}$, ou seja, a partícula pode saltar somente para um dos dois pontos de $\mathbb{Z}$ vizinhos mais próximos de sua posição atual. Se $p = 1/2$, então dizemos que o passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ é simétrico. Denotaremos pelo par (n, a) o passeio estar no ponto a no tempo n.

A probabilidade do passeio se encontrar no ponto b após o n-ésimo passo é dada por:

$$P(S_n = b) = \binom{n}{\frac{n+b}{2}} p^{\frac{n+b}{2}} q^{\frac{n-b}{2}},$$

em que $q = 1 - p$ e $\frac{n+b}{2}$ representa o número de passos à direita necessários para completar o caminho. Se este valor não pertencer aos inteiros positivos menores ou iguais a n, então temos $P(S_n = b) = 0$.

Teorema 2. *(Princípio da Reflexão) Sejam $N_n(a, b)$ o número de caminhos possíveis de $(0, a)$ até (n, b) e $N_n^0(a, b)$ o número de caminhos de $(0, a)$ até (n, b) que incluem um ponto $(k, 0)$, $a, b > 0$. Então $N_n^0(a, b) = N_n(-a, b)$.*

Corolário 1 (Teorema da Eleição)**.** *Se $b > 0$, o número de caminhos de $(0, 0)$ para (n, b) que não revisitam o eixo x é:*

$$\frac{b}{n} N_n(a, b)$$

A aplicação clássica deste resultado é a seguinte: Suponha que numa eleição entre dois candidatos, o candidato A tem α votos e o candidato B tem β, $\alpha > \beta$. Qual a probabilidade de que, durante a contagem de votos, A sempre fique à frente de B? Supondo um voto para o candidato A como um acréscimo de $+1$ e para B de -1, precisamos de um caminho entre $(0, 0)$ a $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$. O número total de caminhos é $N_{\alpha+\beta}(0, \alpha - \beta)$, e, pelo resultado anterior, temos $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} N_{\alpha+\beta}(0, \alpha - \beta)$ caminhos que não cruzam o eixo x. Daí, supondo que cada contagem de votos é igualmente provável, concluímos:

$$P(\text{Candidato A sempre à frente}) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

O leitor interessado nos passeios aleatórios pode consultar as seções 3.9 e 3.10 de Grimmett e Stirzaker (2001) e o capítulo 3 de Schinazi (2014) para mais detalhes.

3 Funções Geradoras de Probabilidade

Esta seção foi baseada no capítulo 5.3 de Grimmett e Stirzaker (2001), que conta com mais resultados elementares de funções geradoras e demonstrações para os teoremas aqui apresentados.

Definição 3. *A função geradora de probabilidade(FGP) de uma variável aleatória X é definida por:*

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^x) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i P(X = i)$$

Se X toma valores inteiros não negativos G_X converge pelo menos para $|s| \leq 1$. Além disso:

$$G_X(0) = P(X = 0),$$

$$G_X(1) := \lim_{s \nearrow 1} G_X(s) = 1.$$

Teorema 4. *Se a variável aleatória X tem FGP G, então:*

a) $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.

b) $\mathbb{E}\big(X(X-1)\dots(X-k+1)\big) = G^{(k)}(1)$.

As Funções Geradoras de Probabilidades permitem construir uma prova simples e elegante para a transitoriedade e recorrência do Passeio Aleatório em $\mathbb{Z}$. Seja $\{S_n\}_{n\geq 0}$ um passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$, começando na origem. Sejam $p_0(n) = P(S_n = 0)$ a probabilidade de se estar na origem após n passos, e $f_0(n) = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n =$

0) a probabilidade de o primeiro retorno à origem ocorrer após n passos. Denotamos as Funções geradoras dessas sequências, respectivamente, por:

$$P_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0(n)s^n,$$

$$F_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_0(n)s^n.$$

Observamos que $F_0(s)$ é a FGP do tempo aleatório T_0 para a partícula fazer seu primeiro retorno à origem, isto é, $F_0(s) = \mathbb{E}(s^{T_0})$. Porém, T_0 pode ser uma variável aleatória defectiva, ou seja, pode assumir o valor infinito com probabilidade maior que 0. Nesse caso, temos:

$$F_0(1) = P(T_0 < \infty) < 1.$$

Teorema 5. *Temos que:*

a) $P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$.

b)$P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$.

c)$F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}$.

Corolário 2. *a) A probabilidade da partícula retornar para a origem é:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_0(n) = F_0(1) = 1 - |p - q|.$$

Se $p = q = \frac{1}{2}$, *o retorno à origem é quase certo, e o processo é chamado de* ***recorrente****. Se* $p \neq \frac{1}{2}$, *então há probabilidade positiva de que a partícula nunca retorne à origem, e dizemos que o processo é* ***transitório****.*

b) Se o processo é recorrente, o tempo esperado para o primeiro retorno é:

$$\mathbb{E}(T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_0(n) = F_0'(1) = \infty.$$

Referências Bibliográficas

G. R. Grimmett; D. R. Stirzaker. *Probability and random processes*. Oxford University Press, New York, 3rd edition, 2001.

R. B. Schinazi. *Classical and spatial stochastic processes. With applications to Biology*. Springer, New York, 2nd edition, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4939-1869-0.