

Resumo

Fluxos Geométricos de Curvas Planas

Aluno: Edson Cidral Filho - RA 215125
Orientador: Dr. Lino Grama
Instituição: IMECC - UNICAMP

Agosto de 2021

Palavras-Chave: Geometria Diferencial de Curvas; Análise Geométrica; Curve Shortening Flow.

1 Objetivos

O projeto teve como objetivo transmitir ao estudante o conhecimento teórico e aplicado no assunto de Fluxos Geométricos de Curvas Planas, com foco em especial no *Curve Shortening Flow* (CSF), Teoremas de Gage-Hamilton e Teorema de Grayson.

2 Pesquisa

Pesquisa feita por meio do estudo dirigido do livro [1] sobre Geometria Diferencial de Curvas no \mathbb{R}^2 , usando de apoio o livro [2]. O estudo teve enfoque no primeiro e oitavo capítulo, onde são introduzidos e desenvolvidos os conceitos aqui resumidos.

Em mais detalhes, no primeiro semestre, foram estudadas as noções básicas de uma curva, reparametrizações, os campos vetoriais associados, e as funções de comprimento de arco e curvatura, assim como os resultados provenientes destes conceitos, como interpretações geométricas de suas propriedades, equações de Frenet e o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

No segundo semestre, foi introduzido os conceitos de variação de curvas e a importância da indicatriz normal na geometria das curvas sob a variação, podendo assim definir o *Curve Shortening Flow* e, então, estudando suas consequências por meio dos Teoremas de Gage-Hamilton e Teorema de Grayson, que foram provados originalmente nos artigos de Gage e Hamilton [3] e de Grayson [4], assim como seus resultados auxiliares.

3 Definições

3.1 Curvas e suas Indicatrizes

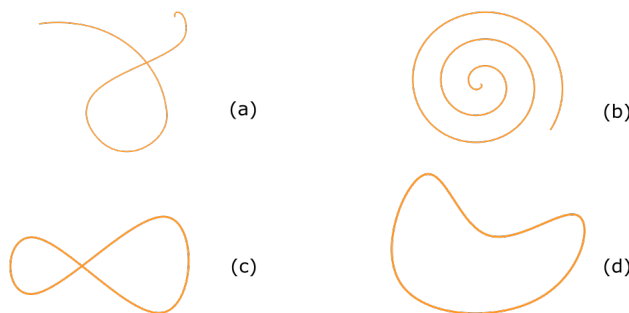


Figura 1 – Exemplos de curvas contínuas no \mathbb{R}^2 .

Temos que uma curva plana pode ser entendida intuitivamente como um intervalo que é deformado, de maneira contínua, dentro do plano do \mathbb{R}^2 ou até mesmo como a trajetória ao longo do tempo de um ponto no plano.

Em geral, vamos ver curvas planas como aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e chamaremos a imagem \mathcal{C} de α de traço de α , dizemos então que α é parametrização \mathcal{C} pelo parâmetro t .

Naturalmente, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definimos suas derivadas de ordem n como $\alpha^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$ e então estendemos as noções de continuidade e diferenciabilidade para as curvas parametrizadas, i.e., α é de classe C^r , $r \geq 0$, se, e só se, suas funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são de classe C^r . Se α tem classe C^∞ , chamamos α de curva suave. Em geral, assumiremos no texto que qualquer curva parametrizada é de classe C^r , $r \geq 1$.

A partir de tais noções, definimos as seguintes propriedades que uma curva pode ter:

Definição 1. Uma aplicação $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, pode ser classificada como

- i. uma curva fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$;
- ii. uma curva simples se α é injetiva em I , i.e. $\alpha(s) \neq \alpha(t) \forall s, t \in [a, b]$.

Damos a denominação especial de **Curva de Jordan** para as curvas que cumpram ambos os critérios.

Definição 2. Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita regular em $t_0 \in I$, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$, caso contrário, dizemos que α é singular $t_0 \in I$ e $\alpha(t_0)$ será denominado a cúspide de α .

Observação. Com base na Definição 1 e usando a figura 1 de exemplo, temos que (a) não satisfaz nenhuma das classificações, enquanto (b) e (c) satisfazem apenas uma classificação cada e, por fim, (d) é satisfaz ambas e pode ser denominada uma Curva de Jordan.

Sob a condições definidas acima, podemos então obter os seguintes campos vetoriais que serão importantes aos próximos conceitos:

Definição 3. Dada α uma curva regular de classe C^r ($r \geq 1$), de forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então chamamos de campo tangente unitário ou indicatriz tangente, o campo de vetores $T : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

Chamamos cada vetor $T(t)$ de vetor tangente unitário de α em $t \in I$.

Definição 4. Dada α uma curva regular de classe C^r ($r \geq 1$), de forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então chamamos de campo normal unitário ou indicatriz normal, o campo de vetores $N : I \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, definido por

$$N(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}.$$

Chamamos cada vetor $N(t)$ de vetor normal unitário de α em $t \in I$.

Observação. Vemos que T, N estão bem definidos no domínio, já que $\|\alpha'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$. Além disso, como $x, y \in C^r$, então T, N são campos de classe C^{r-1} ao longo de α .

3.2 Curvatura e CSF

Definimos a função curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ para curvas regulares e de classe C^r ($r \geq 2$):

Definição 5. Dada a curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r ($r \geq 2$), de forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Temos que a curvatura de α no ponto $t \in I$ é dada por

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

Geometricamente, podemos ver o valor da função curvatura de maneira local como o quanto a curva está "distorcida" em relação a um segmento de reta e, assumindo que a indicatriz normal tem seus vetores apontando para dentro da região limitada pela curva, o sinal da curvatura indica se a distorção aponta na mesma direção deste vetores ($k > 0$) ou na direção oposta ($k < 0$).

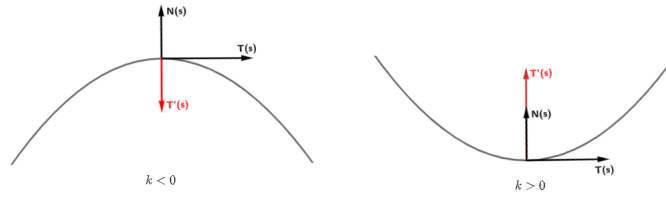


Figura 2 – Interpretação Geométrica da Curvatura

Para ilustrar usaremos o exemplo da curva $\alpha(\theta) = (1 - \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{2})(\cos \theta, \sin \theta)$ e obteremos a curvatura $k_\alpha(\theta) = \frac{2 - \frac{3}{2}(\sin \theta + \cos \theta)}{(\frac{3}{2} - \sin \theta - \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$, pintando as regiões da curva de acordo com os sinais de k_α , obtemos as figuras:

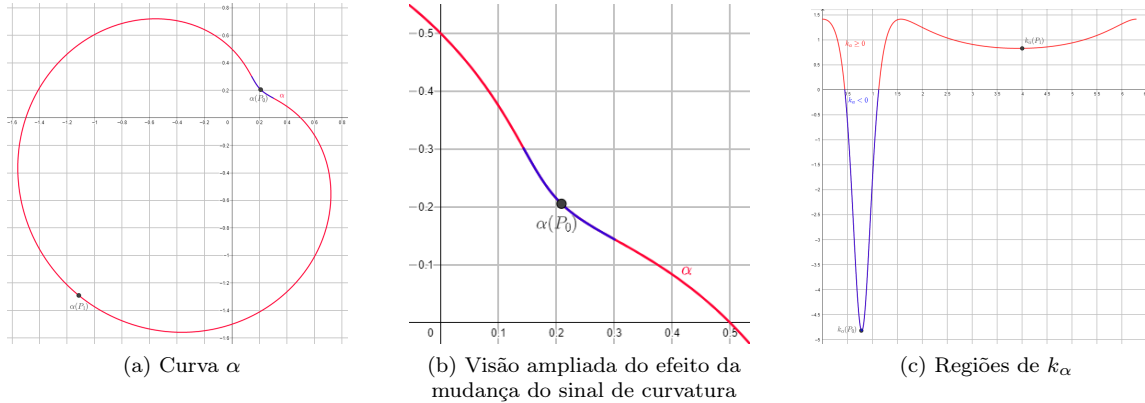


Figura 3 – Exemplo da Influência do Sinal de Curvatura

Dada uma curva inicial X_0 e uma aplicação $X : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ que leva cada $t \in [0, \Gamma)$ a uma curva $X(\cdot, t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, se $\frac{\partial X}{\partial t}$ é contínuo e $X(\cdot, 0) = X_0$, dizemos que X é uma variação de X_0 . Podemos então definir o **Curve Shortening Flow**:

Definição 6. (CSF) Seja $X : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ variação de uma curva $X_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Chamamos tal variação de CSF de X_0 , se X é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN; \\ X(\cdot, 0) = X_0, \end{cases}$$

onde temos $k(u, t) = k_{X(\cdot, t)}(u)$ e $N(u, t) = N_{X(\cdot, t)}(u)$, isto é, k e N associam o par (u, t) à curvatura e o vetor normal em u da curva $X(\cdot, t)$, respectivamente.

4 Teoremas

Alguns resultados relevantes que mostram o comportamento das curvas dentro de um CSF são:

Teorema 7. Temos que se $\mathcal{A}(t)$ é a área da região delimitada por cada curva $X(\cdot, t)$ de um CSF de X_0 , então

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -2\pi.$$

Teorema 8. Se $|k(u, t)| \leq c \in \mathbb{R}_{>0}$ e a curva inicial do CSF X_0 é simples, então, $\forall t \in (0, \Gamma)$, $X(\cdot, t)$ é simples.

Teorema 9. O CSF existe em t até que se tornem nulas a área das regiões que as curvas $X(\cdot, t)$ delimitam.

Os dois resultados mais importantes sobre o CSF são dados pelos teoremas a seguir:

4.1 Teorema de Gage

Seja $X(\cdot, t) : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ um CSF de curva inicial $X_0 \in \mathcal{C}^2$ estritamente convexa, se tivermos $\lim_{t \rightarrow \Gamma} \mathcal{A}(t) = 0$, então dois resultados são satisfeitos:

- i. $\lim_{t \rightarrow \Gamma} \frac{\mathcal{L}^2(t)}{\mathcal{A}(t)} = 4\pi$, onde $\mathcal{L}(t)$ e $\mathcal{A}(t)$ são, respectivamente, o comprimento e a área delimitada de $X(\cdot, t)$;
- ii. As regiões delimitadas pelas curvas normalizadas $Y(\cdot, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{A}(t)}} X(\cdot, t)$ convergem, em sentido Hausdorff, para o círculo unitário.

O Teorema de Gage, provado originalmente em [3], permite entendermos o que ocorre quando colocamos uma curva estritamente convexa sob o CSF, usando que $\lim_{t \rightarrow \Gamma} \mathcal{A}(t) = 0$, então, por (i) temos que $\lim_{t \rightarrow \Gamma} \mathcal{L}(t) = 0$, portanto, as curvas convergem para um conjunto de comprimento nulo e que não delimita área alguma.

Além disso, como suas curvas normalizadas convergem a um círculo unitário, então as curvas originais se aproximam da forma de um círculo conforme evoluem dentro do fluxo. Portanto, concluímos que uma curva convexa sob o CSF converge para o que podemos chamar de "ponto redondo", onde as curvas suficientemente perto de ser tornar um ponto possuem formato próximo de um círculo.

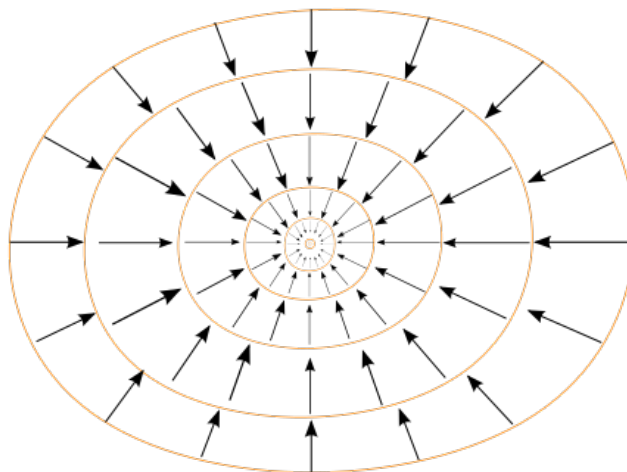


Figura 4 – Exemplo de Curva Convexa sob o CSF

4.2 Teorema de Grayson

Seja a curva $X_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de Jordan e suave (de classe C^∞) que define o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = kN; \\ X(\cdot, 0) = X_0, \end{cases}$$

então existe a solução $X : [a, b] \times [0, \Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e:

- i. as curvas $X(\cdot, t)$ convergem para um único ponto conforme $t \rightarrow \Gamma$;
- ii. as curvas normalizadas $Y(\cdot, t)$ convergem para um círculo unitário na norma C^∞ conforme $t \rightarrow \Gamma$.

O Teorema de Grayson, provado originalmente em [4], expande os resultados que conseguimos com o Teorema de Gage, pois não precisamos mais que a curva seja estritamente convexa, sabemos agora que toda e qualquer Curva de Jordan Suave converge para um "ponto redondo" sob o CSF independente do quão perturbado seja seu traço.

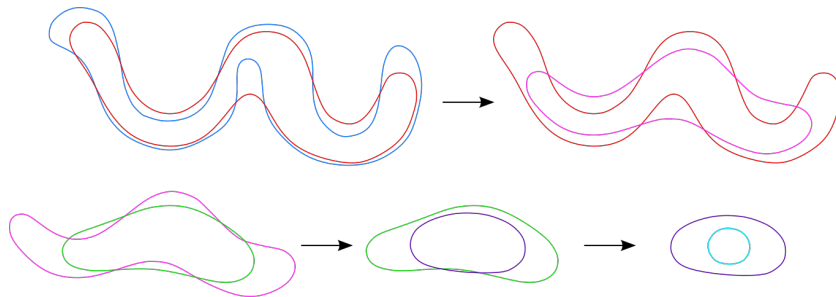


Figura 5 – Exemplo de Curva de Jordan encolhendo sob o CSF simulado em [5].

Na figura, podemos então ver a evolução dois a dois de uma curva inicial de Jordan (em azul) sob um CSF, resultando eventualmente na curva em azul claro. Note que a "última" curva é convexa, assim como as curvas do Teorema de Gage, é, portanto, intuitivo imaginar que o resto de sua evolução acontecerá de maneira semelhante à figura 4, ou seja, a curva tenderá a um ponto redondo como descrito no Teorema de Grayson.

É importante notar que a figura 5 não tem, necessariamente, precisão numérica, sendo apenas uma simulação do comportamento de uma curva sob o CSF e foi obtida usando o software [5].

5 Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pela concessão da bolsa e ao Prof. Dr. Lino Grama pela maravilhosa orientação, apoio e compreensão durante o projeto.

Referências

- [1] *Geometria diferencial de curvas no \mathbb{R}^2* / Hilário Alencar, Walcy Santos e Gregório Silva Neto. – Rio de Janeiro: SBM, 2020.
- [2] *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 2, 3rd Ed.* / Michael Spivak. – Texas: Publish or Perish, 1999.
- [3] *The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves.* / M. Gage e R. S. Hamilton. – J. Differential Geom., 23(1):69–96, 1986.
- [4] *The Heat Equation Shrinks Embedded Plane Curves to Round Points.* / Matthew A. Grayson. – J. Differential Geom., 26(2):285–314, 1987.
- [5] *Curve Shortening Flow - Interactive Demonstration.* / A. Carapetis e S. Ucko - <https://a.carapetis.com/csf/>