Grupos de Lie de dimensão 3

Palavras-Chave: Grupos de Lie, Geometria Riemanniana, Teoria de Lie

Autores:
Otávio Cunha Oliveira [Unicamp]
Prof. Dr. Lino Anderson da Silva Grama (orientador) [Unicamp]

INTRODUÇÃO

O projeto teve como objetivo compreender e trabalhar com a geometria de Grupos de Lie, principalmente a descrição das curvaturas em grupos de Lie tridimensionais feita por John Milnor no seu clássico artigo [1].

Para isso, utilizamos conhecimentos de Teoria de Lie, Geometria Riemanniana, Álgebras de Lie para achar uma maneira adequada de calcular curvaturas em grupos de Lie tridimensionais. O estudo da geometria de grupos de Lie se tornou muito importante, pois, com resultados como os do artigo [1], foi possível achar exemplos mais concretos de variedades, que não são superfícies no espaço euclidiano tridimensional, que satisfizessem determinadas propriedades geométricas relacionadas a curvatura ou geodésicas.

METODOLOGIA

Para esse projeto, o aluno fez uma revisão bibliográfica, principalmente do artigo [1], e destrinchou todos os detalhes do texto que não foram feitos ou deixados a cargo do leitor. Houveram reuniões semanais com o orientador em que o aluno expôs o que leu e aprendeu. Foram nessas reuniões em que o orientador acompanhou o andamento dos estudos e fez propostas para algumas mudanças do rumo do projeto.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Observamos que a noção de grupos de Lie unimodulares e não-unimodulares, provindas da teoria da medida, foi crucial para o cálculo de curvaturas de Ricci e curvaturas secionais.

Para isso, primeiramente, provamos um resultado que mostra como essas noções podem ser expressas usando apenas instrumentos da teoria de Lie clássica e depois dividimos os resultados entre essas duas noções.

Para grupos de Lie de dimensão 3 unimodulares, usando o mapa linear que leva a operação colchete da álgebra de Lie ao produto vetorial definido nessa álgebra, provamos a existência de uma base, chamada referencial de Milnor, da álgebra de Lie em que as curvaturas principais de Ricci foram calculadas a partir das constantes de estrutura dessa base.

Os teoremas que provam a existência do referencial de Milnor e calculam as curvaturas principais de Ricci são dados por:

Teorema 0.1. *O colchete na álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *está relacionado ao produto vetorial pela seguinte maneira: existe* $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *operador linear tal que*

$$[u, v] = L(u \times v)$$

para todo $u, v \in \mathfrak{g}$*. Além disso, o grupo de Lie* G *é unimodular se, e somente se, o operador linear* L *é auto-adjunto.*

Teorema 0.2. *Se* G *é unimodular, existe uma base ortonormal* e_1, e_2, e_3 *positivamente orientada de* $\mathfrak{g}$ *consistindo de autovetores de* L *associados aos autovalores* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*. Essa base satisfaz* $[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3$*,* $[e_3, e_1] = \lambda_2 e_2$ *e* $[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1$*.*

Teorema 0.3. *A base ortonormal* e_1, e_2, e_3 *do teorema anterior diagonaliza a forma quadrática de Ricci e as curvaturas principais de Ricci são dadas por*

$$r(e_1) = 2\mu_2\mu_3,\ r(e_2) = 2\mu_1\mu_3,\ r(e_3) = 2\mu_1\mu_2$$

em que

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i$$

Em particular, segue-se que a curvatura escalar é dada pela fórmula

$$\rho = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2)$$

Para grupos de Lie de dimensão 3 não-unimodulares, utilizando o conceito de núcleo unimodular, também provamos a existência uma base, também chamada referencial de Milnor, da álgebra de Lie em que as curvaturas principais de Ricci foram calculadas a partir das constantes de estrutura dessa base, com contas relativamente mais complicadas que o caso unimodular.

Os teorema que provam a existência do referencial de Milnor e calculam as curvaturas principais de Ricci são dados por:

Teorema 0.4. *Seja um grupo de Lie G conexo tridimensional não-unimodular com uma métrica invariante à esquerda, sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ possui uma base ortonormaç e_1, e_2, e_3 tal que*

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3$$

$$[e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$$

com $[e_2, e_3] = 0$ e tal que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

tenha traço $\alpha + \delta \neq 0$ e $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Se excluirmos o caso excepcional em que A é múltiplo escalar da identidade, então o determinante $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ é um invariante por isomorfismo para essa álgebra de Lie.

Teorema 0.5. *A base construída acima diagonaliza a forma quadrática de Ricci e as curvaturas principais de Ricci são*

$$r(e_1) = -\alpha^2 - \delta^2 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)^2$$

$$r(e_2) = -\alpha(\alpha + \delta) + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \beta^2)$$

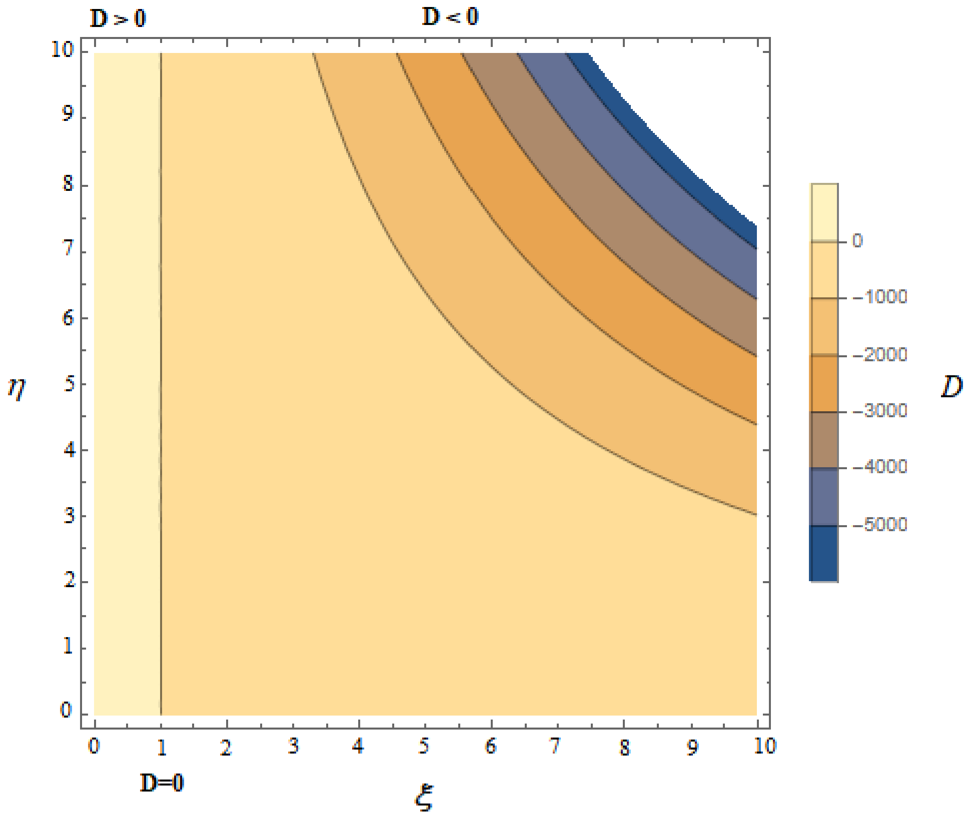
$$r(e_3) = -\delta(\alpha + \delta) + \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2)$$

e a curvatura escalar é dada por:

$$\rho = -(\alpha + \delta)^2 - \alpha^2 - \delta^2 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)^2$$

que é estritamente negativa, pois $\alpha + \delta \neq 0$.

Para esse caso, provamos, no teorema 4 acima, que o determinante da matriz com entradas ordenadas dessa constantes de estrutura é um invariante por isomorfismo dessa álgebra. Esse determinante está em função de dois parâmetros que são fundamentais para determinar a assinatura da forma quadrática de Ricci. O gráfico do determinante como curvas de nível em função desses parâmetros é o seguinte:



CONCLUSÕES

O trabalho proporcionou uma familiaridade com os conceitos básicos de grupos de Lie e álgebras de Lie, além de proporcionar um entendimento de resultados mais modernos para curvaturas em variedades Riemannianas. Os exemplos de curvaturas em grupos de Lie são muito ricos e proporcionaram exemplos muito importantes para a geometria Riemanniana moderno. Foi observado como outras áreas que a princípio parecem desconexas foram fundamentais no desenvolvimento da teoria, como álgebra abstrata, teoria da medida, equações diferenciais ordinárias, entre outras. Isso proporcionou um estudo interdisciplinar entre áreas da matemática, o que enriqueceu todo o conhecimento geral do aluno, atualmente graduando em Matemática pela Unicamp.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo financiamento deste projeto, de número 2020/14316-3.

Referências

[1] MILNOR, John W. ***Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups***, Advances in Math. 21 (1976),293-329.

[2] LEE, John M. ***Riemannian manifolds: an introduction to curvature***. New York, NY: Springer, c1997. 224 p., il. (Graduate texts in mathematics, 176).

[3] Meeks, William & Pérez, Joaquin. (2012). ***Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups***. Contemp. Math.. 570. 10.1090/conm/570/11304.

[4] ERDMANN, Karin. ***Introduction to Lie algebras***. Coautoria de Mark J. Wildon. London: Springer, c2006. 251 p. (Undergraduate mathematics series).

[5] SAN MARTIN, Luiz Antonio Barrera. ***Grupos de Lie***. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, c2016.

[6] SAN MARTIN, Luiz Antonio Barrera. ***Álgebras de Lie***. 2. ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2010.

[7] HALL, Brian C. ***Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction***. New York, NY: Springer, c2003. 351p. (Graduate texts in mathematics, 222).