

Um estudo da Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos Pequena em Grafos Circulantes

Palavras-Chave: Cobertura Dupla por Ciclos, Grafos Circulantes, Potências de Ciclos

Eduardo Vasconcellos¹, C. N. Campos
Instituto de Computação – Unicamp

¹ Desenvolvido com o apoio parcial do CNPq por meio do PIBIC.

Introdução

Seja G um grafo simples, com conjuntos $V(G)$ e $E(G)$ de *vértices* e *arestas*, respectivamente. O *grau* de um vértice v é denotado por $d(v)$ e se $d(v) = k$ para todo $v \in V(G)$, G é dito k -regular. Se um subgrafo H de G possui $d(v) \equiv 0 \pmod{2}$ para todo $v \in V(H)$, dizemos que H é um *subgrafo par* de G . Um *caminho* P em G é uma sequência alternada $v_0e_0v_1e_1 \dots e_{l-1}v_l$ de vértices e arestas, em que: $v_i \in V(G)$ para $0 \leq i \leq l$; $e_i \in E(G)$, $e_i = v_iv_{i+1}$ para $0 \leq i \leq l-1$; e $v_i \neq v_j$, $e_i \neq e_j$ para todo $i \neq j$. Chamamos v_0 e v_l de vértices *inicial* e *final* e P é um caminho *entre* v_0 e v_l . Se existe a aresta v_lv_0 , $P \cup \{v_lv_0\}$ é um *ciclo*. Um ciclo que inclui todos vértices de G é chamado de *ciclo hamiltoniano*. Um grafo G é dito *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices de $V(G)$, e as *componentes conexas* de G são os subgrafos maximais com relação a essa propriedade. O grafo $G - e$ com $V(G - e) = V(G)$ e $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$ é obtido pela *remoção* da aresta e de G . Uma aresta $e \in E(G)$ cuja remoção resulta em um grafo com um número de componentes conexas maior que G é chamada de *aresta de corte*.

Uma *decomposição* de G é um conjunto de subgrafos não vazios de G que particiona suas arestas. Uma *cobertura* de G é uma família \mathcal{G} de subgrafos de G que *cobre* seu conjunto de arestas, isto é, $\cup_{H \in \mathcal{G}} E(H) = E(G)$. Uma aresta $e \in E(G)$ é *coberta k vezes* se aparece em exatamente k subgrafos de \mathcal{G} . Se todas arestas do grafo são cobertas k vezes, \mathcal{G} é uma k -cobertura. Uma 2-cobertura é mais comumente chamada de *cobertura dupla*. Quando cada membro da família é um ciclo, \mathcal{G} é dita uma *cobertura por ciclos*.

No estudo de coberturas, o desafio é determinar quais grafos as admitem com determinadas características. Em especial, decidir se um grafo admite uma cobertura dupla por

ciclos é um problema clássico em Teoria dos Grafos, que intersecta diversos outros problemas e vem sendo estudado por muitos pesquisadores [7]. Esse problema, apresentado na Conjetura 1, foi proposto por G. Szekeres [9] em 1973 e, independentemente, por P. Seymour [8] em 1979.

Conjetura 1 (Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos (CCDC)). *Todo grafo sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por subgrafos pares.*

Apesar de publicada pela primeira vez na década de 70, não se sabe ao certo quem foi o primeiro a estabelecer o problema. Em 1987, W. Tutte [10] escreveu, em uma carta para H. Fleischner, que a conjetura já fora estabelecida em discussões matemáticas bem antes de aparecer em uma publicação oficial, tornando difícil encontrar a origem da conjetura.

Tanto pelo seu interesse teórico intrínseco quanto pelas implicações em outros problemas, a CCDC tem atraído a atenção de muitos pesquisadores e gerado resultados significativos na literatura. Em 1979, Seymour [8] mostrou que um contraexemplo minimal para a conjetura é um grafo 3-regular. Em 1993, B. Alspach e C.-Q. Zhang [2, 1] verificaram a conjetura para grafos que não contêm uma subdivisão do Grafo de Petersen. Além dos avanços obtidos na CCDC, muitas variantes da conjetura também foram propostas. Em 1984, Celmins [6] formulou uma versão mais forte da CCDC, conjecturando que todo grafo sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por até cinco subgrafos pares. Uma outra variante famosa do problema, proposta em 1990 por A. Bondy [5], restringe o número de ciclos com base na quantidade de vértices do grafo, e está enunciada a seguir.

Conjetura 2 (Conjetura da Cobertura Dupla Por Ciclos Pequena (CCDCP)). *Todo grafo G sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por ciclos com no máximo $|V(G)| - 1$ ciclos.*

Neste trabalho, estudamos a Conjetura 2. Inicialmente, ela foi verificada para as potências de ciclos. Em seguida, ampliamos o escopo e a abordamos para outras subclasses dos grafos circulantes.

Resultados

Seja K_n um grafo completo com $V(K_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e $E(K_n) = \{v_i v_j : 0 \leq i \leq n-1, v_i \neq v_j\}$. O alcance $r(v_i v_j)$ de uma aresta $v_i v_j$ é definido como $r(v_i v_j) = \min\{(v_i - v_j) \pmod{n}, (v_j - v_i) \pmod{n}\}$. Definimos como $E_r \subseteq E(K_n)$ o conjunto de todas as arestas de alcance r . Um grafo *circulante* $G = C_n(r_1, r_2, \dots, r_k)$ com n vértices possui $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ como seu *conjunto de alcances*, com $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k < n/2$, de forma que $E(G) = \{E_r : r \in \mathcal{R}\}$. Note que, para cada vértice v_i e para cada alcance r , existem duas arestas de alcance r incidindo em v_i . Logo, todo vértice v possui

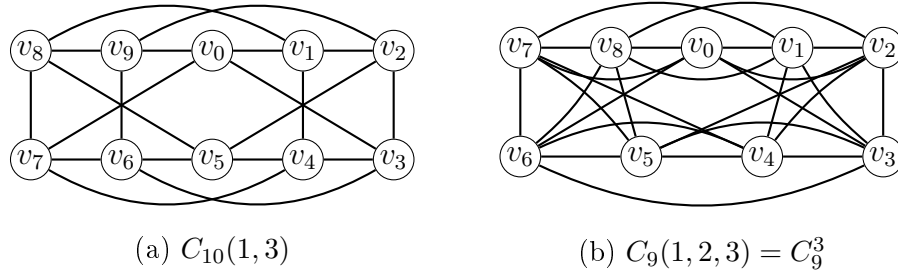


Figura 1: Exemplos de grafos circulantes.

$d(v) = 2|\mathcal{R}|$. Uma *potência de ciclos* C_n^k é o caso particular de grafo circulante para o qual $\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, k\}$.

Seja $G = C_n(r_1, r_2, \dots, r_k)$ um grafo circulante com $k \equiv 0 \pmod{2}$. Se é possível particionar \mathcal{R} de maneira que cada parte possua dois elementos e para toda parte $\{r_i, r_j\}$, $\gcd(n, r_i, r_j) = 1$, então G é dito grafo circulante *alcance-pareável*.

Em 1990, no mesmo artigo em que propôs a CCDCP [5], Bondy a verificou para algumas classes básicas de grafos, dentre elas os grafos completos K_n . Note que quando k é ímpar e $k = \frac{n-1}{2}$, $C_n^k \cong K_n$. Outro resultado importante para este trabalho foi obtido por J. Bermond et Al. [3], em 1989. Uma versão mais restrita do resultado publicado, que serve aos propósitos deste trabalho, está expressa no Lema 3.

Lema 3. *Todo grafo circulante conexo 4-regular pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos.* □

Além do Lema 3, utilizamos também um resultado conhecido com relação à conexidade em grafos circulantes, obtido por F. Boesch [4] em 1984. O resultado está enunciado no Lema 4.

Lema 4. *O grafo $C_n(r_1, \dots, r_k)$ é conexo se e somente se $\gcd(r_1, \dots, r_k, n) = 1$.* □

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido em parceria com dois outros estudantes de Iniciação Científica do PIBIC: L. M. Tateishi e J. Vianini. Os Teoremas 5 e 6 sintetizam os resultados obtidos e estão apresentados no restante desta seção. É importante ressaltar que, embora a demonstração exibida no Teorema 5 tenha sido feita independentemente, o resultado do teorema já havia sido publicado por Bermond et Al. [3]

Teorema 5. *Toda potência de ciclos admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.*

Demonstração. Seja $G = C_n^k$ uma potência de ciclos. Podemos supor $k < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, dado que o resultado segue para os grafos completos. Suponha, inicialmente, $k \equiv 0 \pmod{2}$. Seja $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_{k/2}\}$ uma decomposição de G tal que cada $G_i \cong C_n(2i-1, 2i)$, $1 \leq i \leq k/2$. Logo, cada G_i é um grafo circulante 4-regular. Note que $\gcd(2i-1, 2i, n) = 1$. Pelo Lema 4,

G_i é conexo. Dessa forma, pelo Lema 3, concluímos que G_i possui uma decomposição em dois ciclos hamiltonianos H_i^1, H_i^2 . Como $G_i \subseteq G$, então $H_i^1, H_i^2 \subseteq G$. Concluímos que $\mathcal{H} = \{H_i^1, H_i^2 : 1 \leq i \leq k/2\}$ é uma decomposição de G com exatamente k ciclos. Duplicando cada elemento de \mathcal{H} , obtemos uma cobertura dupla por ciclos de G , com $2k$ ciclos. Como $k \leq \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$, então essa cobertura verifica a CCDCP.

Suponha, então, $k \equiv 1 \pmod{2}$. Inicialmente, note que $C_n(1)$ é isomorfo a um ciclo hamiltoniano H . Considere $G' = C_n(2, \dots, k)$. Usando um raciocínio similar ao do caso anterior, construímos $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_{\frac{k-1}{2}}\}$ em que cada $G_i \cong C_n(2i, 2i+1)$, $1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$, e obtemos uma decomposição \mathcal{H}' com exatamente $k-1$ ciclos para G' . Concluímos que $\mathcal{H}' \cup \{H\}$ é uma decomposição para G com exatamente k ciclos e o resultado segue. \square

Teorema 6. *Seja $G = C_n(r_1, r_2, \dots, r_k)$ um grafo circulante. Então,*

- (i) *Se $k \equiv 0 \pmod{2}$ e o grafo é alcance-pareável, então G admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.*
- (ii) *Se $k \equiv 1 \pmod{2}$ e, quando $|\mathcal{R}| \geq 2$, existe um alcance $r \in \mathcal{R}$ tal que se as arestas E_r forem removidas de G , o resultado é um grafo alcance-pareável, então G admite uma cobertura dupla por ciclos pequena sempre que $k \leq 5$.*

Esboço de demonstração. Seja $G = C_n(r_1, r_2, \dots, r_k)$ um grafo circulante. Suponha $k \equiv 0 \pmod{2}$ e que o grafo seja alcance-pareável. Então, existe uma partição $\mathcal{A} = \{R_1, \dots, R_k\}$ de \mathcal{R} tal que para todo $R_i = \{r_{i_1}, r_{i_2}\} \in \mathcal{A}$, $|R_i| = 2$ e $\gcd(n, r_{i_1}, r_{i_2}) = 1$. Seja $\mathcal{F} = \{G_1, \dots, G_{k/2}\}$ uma decomposição de G tal que cada $G_i \cong C_n(r_{i_1}, r_{i_2})$. Seguindo a ideia da prova do Teorema 5, construímos uma cobertura dupla por $2k$ ciclos do grafo. Como $k < n/2$, $2k \leq n-1$ e o resultado segue.

Suponha, então, $k \equiv 1 \pmod{2}$. Se $k = 1$, seja r o alcance de \mathcal{R} . Existe uma decomposição de G com $\gcd(n, r)$ ciclos. Como $\gcd(n, r) \leq r \leq \frac{n-1}{2}$, o resultado segue. Suponha $k = 3$ e que a remoção de todas as arestas correspondentes a um certo alcance de G resulte em um grafo alcance-pareável. Suponha, inicialmente, $k = 3$. Seja l tal que a remoção das arestas E_l gere um circulante alcance-pareável. Repetindo o método de construção aplicado no caso anterior, e somando $\gcd(n, l)$ ciclos – referentes a E_l –, obtemos uma decomposição do grafo original com $k-1 + \gcd(n, l)$ ciclos. Queremos que esse valor seja menor que $(n-1)/2$ para que a cobertura dupla gerada a partir dessa decomposição seja pequena. Considerando $k = 3$, concluímos que, quando $\gcd(n, l) \leq \frac{n-5}{2}$, o resultado segue. Suponhamos, então, $\gcd(n, l) > \frac{n-5}{2}$. Por definição de máximo divisor comum, $l > \frac{n-5}{2}$. Sabemos também que $l < n/2$, relação que se aplica a todos alcances de \mathcal{R} . Como $l \in \mathbb{Z}$, $l \in \{\frac{n-4}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2}\}$. A prova procede pela análise exaustiva de cada elemento inteiro desse conjunto. Para cada valor possível de l , ou obtemos uma contradição

– o que significa que a suposição de que $\gcd(n, l) > \frac{n-5}{2}$ não ocorre para o caso e, portanto, o resultado segue –, ou obtemos um grafo circulante para o qual conseguimos exibir uma cobertura dupla por ciclos pequena. O raciocínio para o caso em que $k = 5$ é análogo. \square

Neste trabalho, estudamos a CCDCP nas potências de ciclos e em alguns outros casos de grafos circulantes. Desenvolvemos um método para encontrar uma cobertura por meio de decomposições em ciclos hamiltonianos. A nossa estratégia verifica a conjectura para todas as potências de ciclos e algumas outras subclasses de grafos circulantes. Além dos resultados do Teorema 6, conhecemos outros grafos circulantes para os quais a técnica produz uma cobertura dupla por ciclos pequena. Entretanto, existem casos para os quais o método não funciona tão bem, evidenciando as limitações da abordagem. Um exemplo de grafo que verifica a CCDCP e para o qual a ideia não funciona é $G = C_{210}(\{6k : 0 < k < 18\} \cup \{1, 70, 75, 76\})$. A nossa técnica constrói uma cobertura dupla com 212 ciclos, sendo que uma pequena pode ter no máximo 209 ciclos. Dessa forma, uma continuidade interessante para a pesquisa aqui desenvolvida é investigar a natureza dos contraexemplos para a nossa estratégia com o objetivo de melhor caracterizá-los.

Referências

- [1] B.R. Alspach, L.A. Goddyn, and C.-Q. Zhang. Graphs with the circuit cover property. *Transactions of the American Mathematical Society*, 344(1):131–154, 1994.
- [2] B.R. Alspach and C.-Q. Zhang. Cycle covers of cubic multigraphs. *Discreet Mathematics*, 111(1):11–17, 1993.
- [3] J.-C. Bermond, O. Favaron, and M. Maheo. Hamiltonian Decomposition of Cayley Graphs of Degree 4. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 46(2):142–153, 1989.
- [4] F. Boesch and R. Tindell. Circulants and their connectivities. *Journal of Graph Theory*, 8(4):487–499, 1984.
- [5] J.A. Bondy. Small Cycle Double Covers of Graphs. In G. Hahn, G. Sabidussi, and R.E. Woodrow, editors, *Cycles and Rays*, pages 21–40. NATO ASI Series C, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [6] U. Celmins. *On Cubic Graphs That Do Not Have an Edge-3-Coloring*. PhD thesis, University of Waterloo, 1984.
- [7] F. Jaeger. A Survey of the Cycle Double Cover Conjecture. *Annals of Discrete Mathematics*, 115(27):1–12, 1993.
- [8] P. Seymour. Sums of circuits. In J.A. Bondy and U.S.R. Murty, editors, *Graph Theory and Related Topics*, pages 341–355. Academic Press, 1979.
- [9] G. Szekeres. Polyhedral decomposition of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8:367–387, 1973.
- [10] W. T. Tutte. Carta para H. Fleischner (22 de julho, 1987).