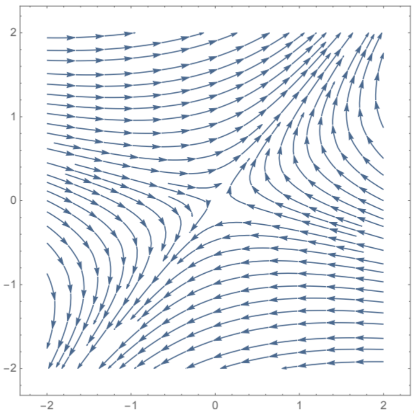
XXIX Congresso de Iniciação Científica UNICAMP 2021

Estabilidade estrutural de sistemas lineares e lineares por partes de equações diferenciais

Aluna: Stephanie Gabriele Nietto
Orientador: Ricardo Miranda Martins

1 Introdução e motivação

Em um sistema de equações diferenciais, o "esboço" do retrato de fase é o que chamamos de **comportamento qualitativo**, ou seja, ignorando os números e "ângulos" envolvidos, o retrato de fase será este. Isto é o que acontece por exemplo com qualquer sistema linear 2×2 cuja matriz dos coeficientes tenha um autovalor positivo e outro negativo: serão sempre como a figura abaixo, a menos de rotações, escalas e mudanças de direção dos vetores.



Uma vez que o retrato de fase de um sistema é caracterizado pelos *autovalores* e *autovetores* da matriz dos coeficientes, é feita uma classificação completa baseada nisto.

2 Objetivos

Numa tentativa de se introduzir ao estudo de sistemas dinâmicos busca-se neste projeto de iniciação científica estudar a estabilidade estrutural de sistemas lineares e lineares por partes de equações diferenciais.

A fim de se estabelecer uma conexão clara e concreta entre o estudo de equações diferenciais e a álgebra linear, foram estudados, a priori, alguns conceitos e resultados relacionados à Forma de Jordan de um operador linear.

Estabelecidas estas conexões, podemos determinar as soluções gerais de sistemas bidimensionais simples. Para esse estudo, também foram desenvolvidos os retratos de fase de cada caso particular no software Mathematica.

2.1 Sistemas bidimensionais simples

Depois de enunciar o teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, bem como da exponencial matricial como solução de sistemas lineares com coeficientes constantes, nos limitamos ao caso de sistema 2×2 para estudar o comportamento dos retratos de fase.

Dois resultados importantes para este estudo relacionam os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes A e as soluções do sistema, ou seja, eles permitem escrever as soluções gerais em termos de autovalores e autovetores.

Lema 2.1. *Seja A uma matriz complexa (respectivamente, real). Se λ é um autovalor complexo (respectivamente, autovalor real) de A e v é um autovetor associado a λ, então $\varphi(t) = e^{\lambda t}\mathrm{v}$ é uma solução da equação complexa (respectivamente, real) $x' = Ax$.*

Proposição 2.1. *Se a matriz complexa (respectivamente, real) A de ordem n tem autovalores complexos (respectivamente, autovalores reais) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ e autovetores associados $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n$, então a matriz $V(t)$, cuja i-ésima coluna, $i = 1, \cdots, n$, é $\varphi_i(t) = \mathrm{v}_i e^{\lambda_i t}$ é uma matriz fundamental de $x' = Ax$. Em particular, têm-se que*

$$e^{tA} = V(t)V^{-1}(0)$$

Finalmente, podemos considerar sistemas da forma:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

em que A é uma matriz real ou complexa, Vamos considerar também que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, ou seja, temos equações lineares homogêneas da forma

$$x' = Ax \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{bmatrix} \text{ e } \det A \neq 0$$

então podemos associá-las a campos vetoriais lineares em $\mathbb{R}^2$.

Para conhecermos a forma das trajetórias, devemos estudar o polinômio característico de A que obtemos fazendo $det(\lambda I - A)$:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

portanto, os autovalores são

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

e vamos distinguir aqui os três casos:

1. Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **reais e distintos**. Necessariamente $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.
2. Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **complexos conjugados**: $\lambda_1 = \alpha + \mathbf{i}\beta, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - \mathbf{i}\beta$ com $\beta \neq 0$.
3. Os autovalores λ_1, λ_2 de A são **reais e iguais**: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Por exemplo considerando o primeiro caso, temos a seguinte análise:

Caso 1: Uma vez que v_1, v_2 são autovetores associados a λ_1, λ_2, podemos aplicar a proposição 2.1 que garante também que toda solução de $x' = Ax$ pode ser escrita como

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Aqui podemos distinguir ainda 4 casos:

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ - **nó atrator** (ou ralo, sink)
- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ - **nó repulsor (ou instável, fonte, source)**
- $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ - **sela**
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$

  Considerando o primeiro ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$), temos que trajetória tende a zero quando $t \to +\infty$; exceto a origem que permanece fixa e, similarmente, toda trajetória tende a ∞ quando $t \to -\infty$.

  Veja que se tivermos $c_2 \neq 0$ e $c_1 = 0$, as trajetórias são as semirretas de E_2, pois apenas v_2 será parte da solução, e tendem à origem quando $t \to \infty$.

  Agora supondo que $c_1 \neq 0$ e considerando a curva $t \mapsto (x_1(t), x_2(t)) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$ temos

  $$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}$$

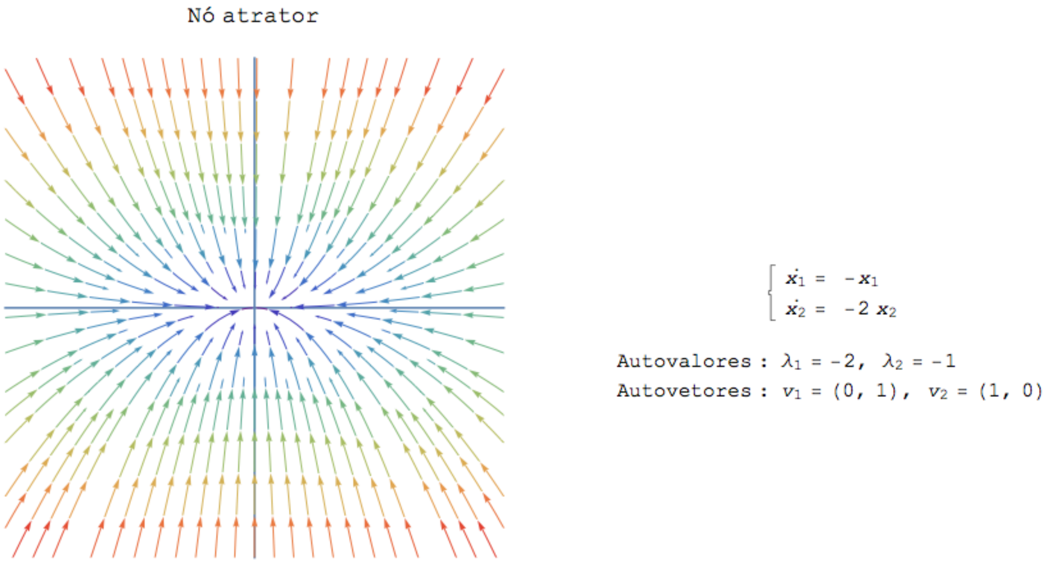
  de onde vem pela regra da cadeia

  $$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

e temos:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to -\infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \frac{c_2}{c_1} > 0 \\ -\infty & \text{se } \frac{c_2}{c_1} < 0 \end{cases}$$

uma vez que $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. Isto significa que a reta tangente à trajetória tende à reta E_1 quando $t \to +\infty$. Para este caso, temos um retrato de fase da forma



3 Conclusões

Estabelecida uma base sólida para estudos futuros, o estudo de teoremas importantes de estabilidade em sistemas lineares, com base em [5] e [4] tornou-se possível, sempre registrando todos os resultados e avanços nas notas de aula online que serão aproveitadas pela aluna em sua vida acadêmica.

Um dos resultados mais importantes (de [4]) relaciona um operador e seus autovalores, e pode ser enunciado como

Proposição 3.1. *Os autovalores de um operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dependem continuamente de T.*

Com este resultado central e outros que se seguem, a conclusão geral é de que um campo linear é estruturalmente estável no espaço dos campos lineares se, e só se, é hiperbólico, isto é, se os autovalores de T não tem parte real nula.

Do trabalho já realizado foi possível estabelecer relações multidisciplinares interessantes e ter uma boa perspectiva dos resultados necessários para o estudo de estabilidade. Além da proximidade com os conteúdos, todos os retratos de fase utilizados foram realizados no software de álgebra computacional Mathematica, contribuindo para o domínio e integração de tecnologias aos estudos.

Referências

[1] A. G. F. Almeida. **A Forma de Jordan e algumas aplicações**. http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/427/1/PDF\%20-\%20Arthur\%20Gilzeph\%20Farias\%20Almeida.pdf. Acesso em 11 fev. 2021.

[2] A. Freira. **Forma de Jordan e Equações Diferenciais Lineares**. http://www.ime.unicamp.br/~aloisio/documentos/jordan.pdf. Acesso em 11 fev. 2021.

[3] D. A. S. Oliveira. **Estabilidade Espectral no Problema Carregado de N-Corpos**. Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT, 2018. Acesso em 26 fev. 2021.

[4] J. Palis and W. Melo. ***Introdução aos Sistemas Dinâmicos***. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1975.

[5] J. M. T. Sotomayor. ***Lições de equações diferenciais ordinárias***. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.