



Análise Não-linear de Vigas de Timoshenko compostas por Materiais Gradualmente Funcionais através do Método dos Elementos Finitos

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos, Análise não linear, Viga de Timoshenko.

Marcos Antonio Riquetto Ezequiel [FEM]
Prof. Dr. Carlos H. Daros [FEM]

0.1 Introdução

A análise computacional de estruturas lineares é um método poderoso para avaliar o comportamento de estruturas complexas. Porém a formulação linear tem suas limitações. Na formulação de vigas essas limitações podem ser de natureza geométrica e/ou material. Quando as cargas aplicadas na viga são grandes a relação linear entre tensão e deformação deixa de ser válida, já que a viga começa a apresentar forças internas que resistem a deformação, quanto maior a carga maiores são essas forças (Reddy, 2014). Isso significa que a análise não-linear irá resultar em uma viga mais rígida e permitirá cargas maiores, uma vez que a análise não-linear representa mais fielmente o comportamento da viga. A teoria clássica de viga Euler-Bernoulli não inclui os efeitos de deformação cisalhante, para vigas espessas a tensão cisalhante não pode ser negligenciada (Shames e Dym, 2013). Para generalizar a formulação de viga a teoria de viga de Timoshenko foi usada, em geral a tensão cisalhante passa a ser relevante se a razão comprimento/espessura da viga for menor do que 25 (Reddy, 2014). Levar em conta a não-linearidade geométrica e utilizar a teoria de Timoshenko permitem uma modelagem mais realista das vigas. Porém, a análise não-linear e a inclusão da deformação cisalhante podem introduzir problemas numéricos conhecidos como efeitos de travamento. Os efeitos de travamento presentes são travamento de membrana e ao cisalhamento. Integração reduzida é um método comum de evitar esses problemas numéricos e será utilizada para essa formulação. Vigas de Timoshenko nos permitem investigar o comportamento de alguns materiais gradualmente funcionais. Esses materiais são multi funcionais e fabricados sobre medida, com diversas aplicações como na indústria aeroespacial (Mortsen e Suresh, 1998).

0.2 Teoria

O elemento finito não-linear de Timoshenko utilizado nesta pesquisa é baseado na formulação apresentada por Reddy (2014), que leva em consideração pequenas deformações e pequenas/moderadas rotações. A não-linearidade geométrica do problema é causada pela inclusão de termos do quadrado da rotação, enquanto são desconsiderados os termos

quadrados de alongamento no plano, conhecida como não-linearidade de *von Kármán*. Também é assumido em vista das pequenas deformações, que não é necessária distinção entre coordenadas do sistema deformado e indeformado.

A teoria clássica de viga de Euler Benoulli afirma que uma secção plana perpendicular ao eixo principal da viga no estado indeformado permanece plana e normal ao eixo conforme a viga é flexionada pelo carregamento (Shames e Dym, 2013). Isso é equivalente a negligenciar o efeito de Poisson e as deformações transversais e de cisalhamento. A teoria de viga de Timoshenko utiliza suposições similares, porém uma secção plana não é mais necessariamente perpendicular ao eixo principal, isso permite o aparecimento de deformações cisalhantes na viga. A Figura (1) representa a Cinemática da teoria de viga de Timoshenko. Através do princípio dos deslocamentos virtuais podemos desenvolver

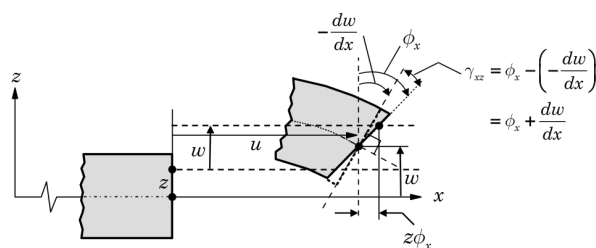


Figura 1: Cinemática de uma viga pela teoria de viga de Timoshenko (Reddy, 2014).

a forma fraca do problema e a partir da aproximação dos deslocamentos (u, w) axial e transversal e da rotação do plano transversal em torno do eixo y (ϕ_x) na forma:

$$u(x) = \sum_{j=1}^m u_j^e \psi_j^{(1)}, \quad w(x) = \sum_{j=1}^n w_j^e \psi_j^{(2)}, \quad \phi_x(x) = \sum_{j=1}^p s_j^e \psi_j^{(3)} \quad (1)$$

onde $\psi_j^\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) são funções de interpolação de Lagrange, é possível escrever as equações do elemento finito na forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{13} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} & \mathbf{K}^{23} \\ \mathbf{K}^{31} & \mathbf{K}^{32} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \mathbf{F}^3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Vale ressaltar aqui que a não-linearidade geométrica e a composição gradualmente funcional do material causam um acoplamento entre o deslocamento axial e o deslocamento transversal e rotação da viga. Isso faz com que forças internas que resistam a deformação sejam formadas, tornando a viga mais rígida, do que em uma análise linear. Além disso como o problema é não-linear a matriz de rigidez \mathbf{K} fica em função do vetor deslocamento \mathbf{U} , dessa forma é necessário a aplicação de um método iterativo de solução de equações não-lineares. Para essa pesquisa foi utilizado o procedimento de iteração de Newton.

Nessa pesquisa foram utilizados dois tipos de materiais gradualmente funcionais. O primeiro é dado pela Eq. (3), que descreve uma viga em que 100% de sua superfície

superior é composta pelo material 1 e 100% de sua superfície inferior é composta pelo material 2.

$$E(x, z) = [E_1(x) - E_2(x)] \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right)^n + E_2(x) \quad (3)$$

onde $E_1(x)$ e $E_2(x)$ são os módulos de elasticidade dos materiais a serem combinados, H é a espessura da viga e n é o índice que controla a lei de potência da distribuição dos dois materiais, na Figura (2a) é possível observar como esse índice influencia a composição da viga.

O segundo material utilizado é dado pela Eq. (4) que descreve uma viga cuja rigidez diminui ou aumenta, exponencialmente, ao longo de sua espessura.

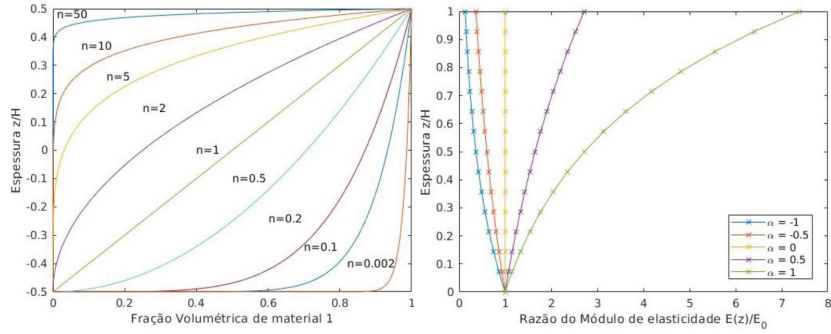


Figura 2: (a) Fração volumétrica de material 1 em função do índice n ; (b) Razão do módulo de elasticidade em função do índice α .

$$E(z) = E_0 e^{2\alpha(z+H/2)} \quad (4)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade na superfície inferior da viga e o índice α controla o comportamento exponencial do módulo de elasticidade.

0.3 Resultados

Para avaliar os efeitos da não-linearidade e da composição material, foram resolvidos alguns exemplos simples. O primeiro exemplo consiste em uma viga fixada por pinos em ambas extremidades (restrição axial e transversal), de seção transversal quadrada, altura $H = 3$ cm, material homogêneo com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, carregamento distribuído constante de $q_0 = 2000$ N/m e comprimento variável para podermos estudar a influência da razão L/H . Todos os exemplos foram resolvidos utilizando-se 40 elementos quadrados e tolerância de $\epsilon = 10^{-5}$. Para comparar os resultados entre diferentes comprimentos foi utilizada a relação $w_b = w(x = L/2)H^3/L^4$. Na Figura (3a) é possível observar que para razões de L/H pequenas o problema tem comportamento linear, devido a alta rigidez da viga, conforme esse valor aumenta é possível observar uma não-linearidade acentuada entre o deslocamento e o carregamento aplicado. Na Figura (3b) podemos visualizar a relevância da tensão de cisalhamento no problema, conforme

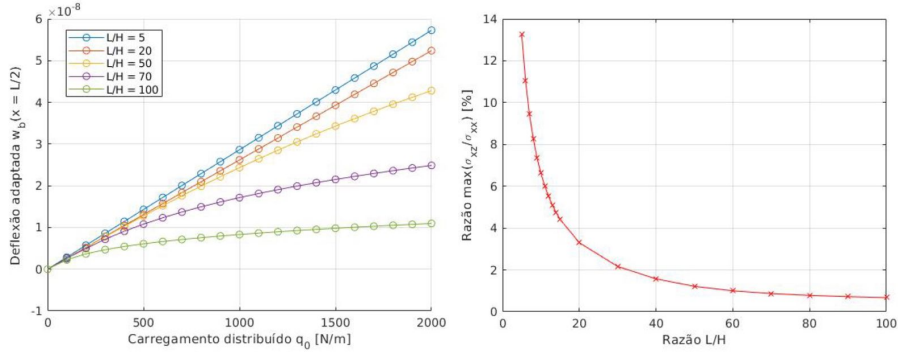


Figura 3: (a) Deflexão no centro da viga em função do carregamento; (b) Razão entre a máxima tensão cisalhante e a máxima tensão axial em função da razão L/H .

a razão L/H aumenta o problema se aproxima da teoria de viga de Euler-Bernoulli, que justamente despreza a tensão de cisalhamento.

Para estudar a influência da fixação da viga iremos utilizar o mesmo problema anterior, porém com comprimento fixo de $L = 90$ cm e fixações nas extremidades variáveis.

A Figura (4) mostra os resultados para 3 fixações diferentes. Como esperado a viga

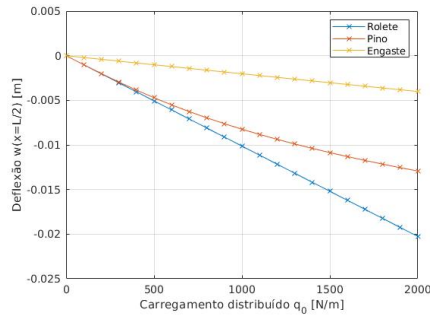


Figura 4: Deflexão no centro da viga em função do carregamento para diferentes condições de contorno.

apoiada por roletes é linear, já que não há restrições axiais a viga é livre para "deslizar" eliminando a não-linearidade. As fixações por engaste e pinos restringem movimento axial, porém o engaste proporciona uma alta rigidez ao problema por isso para essas cargas apresenta comportamento linear, já a viga fixada por pinos apresenta alta não-linearidade.

Para avaliarmos a influência da composição da viga será avaliado a viga do exemplo 1 com comprimento fixo $L = 1.5$ m e composição material alterada. A viga do material descrito pela lei de potência tem $E_1 = 200$ GPa e $E_2 = 200/3$ GPa e índice n variável, já a viga descrita pela função exponencial tem $E_0 = 70$ GPa e índice α variável.

Como é possível observar na Figura (2a) o índice n controla a fração volumétrica de

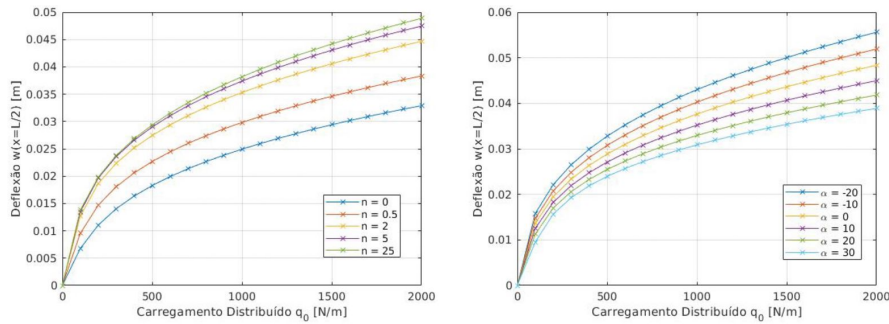


Figura 5: (a) Deflexão no centro da viga em função do carregamento para diferentes n ; (b) Deflexão no centro da viga em função do carregamento para diferentes α .

cada material na viga, o material 1 nesse caso apresentando maior módulo de elasticidade, logo é esperado que conforme o valor de n aumenta a fração de material 2 aumenta e o módulo de elasticidade da viga como um todo diminui. Por isso na Figura (5a) observamos um aumento na deflexão no centro da viga conforme o índice aumenta. Já para o outro material como representado na Figura (2b) valores negativos de α causam uma diminuição do módulo de elasticidade ao longo da espessura e valores positivos um aumento. A Figura (5b) aponta muito bem isso, para valores negativos a deflexão é mais alta e diminui conforme o índice aumenta. Para ambos os problemas $(n, \alpha) = 0$ representam o problema homogêneo com módulo de elasticidade constante ao longo da espessura.

0.4 Conclusão

A formulação e os métodos utilizados para a solução das equações não-lineares apresentaram resultados satisfatórios, com convergência rápida. Os resultados obtidos para as diferentes condições de contorno e composições materiais estão dentro do que era esperado, e coerentes com o comportamento dos materiais analisados. Dessa forma a formulação é apropriada para a análise de vigas nas condições estipuladas de pequenas deformações e moderadas rotações.

0.5 Referências Bibliográficas

- Dym, Clive L., and Irving H. Shames. Solid mechanics : a variational approach. New York London: Springer, 2013.
- Reddy, J. N. An introduction to nonlinear finite element analysis : with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics. Oxford: Oxford University Press, 2014.
- SURESH, S. e MORTENSEN, A. Fundamentals of Functionally Graded Materials. Institute of Materials IOM Communications, London, 1998.