Sistemas Dinâmicos e Modelos Epidemiológicos

Palavras-Chave: Sistemas Dinâmicos, COVID-19, Epidemiologia

Autor:
BRUNO ASSUMPÇÃO PREVIDELI [IMECC-UNICAMP]
Prof. Dr. DOUGLAS DUARTE NOVAES (Orientador) [IMECC-UNICAMP]

INTRODUÇÃO:

Em dezembro de 2019, foi registrado o primeiro caso confirmado de COVID-19 no mundo, em específico, na China. Até então, não se havia noção da dimensão e dos danos que a doença traria para o mundo.

Com o passar do tempo, foi possível notar que sua taxa de transmissão era muito alta, o que fez com que disseminasse de forma exponencial, fazendo com que o número de contaminados crescesse em grande velocidade. Pouco tempo depois da confirmação do primeiro caso, a doença espalhou-se por diversos países do mundo inteiro e, foi no dia 26/02, que confirmou-se o primeiro caso da doença no Brasil.

Devido à alta velocidade de propagação da doença ao redor de todo o mundo, no dia 11/03 a Organização Mundial de Saúde (OMS) declarou pandemia do novo Coronavírus, obrigando países a tomarem atitudes preventivas.

Com o desrespeito e não cumprimento das diversas medidas de isolamento e higiene, no Brasil o COVID-19 tomou gigantes proporções, tornando-se o epicentro da doença. Hoje, o número de casos ultrapassa 20700000, com mais de 579000 mortes.

Desde então, diversas pesquisas foram realizadas a fim de compreender casos/mortes a redor do mundo. Em matemática, a teoria dos sistemas dinâmicos é utilizada para modelar fenômenos ao decorrer do tempo. Ela propõe que as soluções sejam objetos de uma análise qualitativa, uma vez que a maioria das equações diferenciais não podem ser resolvidas.

Nesse trabalho, foram estudados os conceitos de equações diferenciais para que fosse possível compreender os modelos epidemiológicos e assim, baseado nas características e dados reais da COVID-19, modelar os casos e mortes no Brasil.

METODOLOGIA:

Os estudos tiveram início na compreensão de função lipschitziana, que são importantes para as equações diferenciais. Com isso, foi possível enunciar e provar que toda função lipschitziana é uniformemente contínua, onde definimos $\delta \coloneqq \frac{\epsilon}{C}$, sendo C a constante lipschitziana.

A partir disso, foi dado início ao estudo de equações diferenciais, que é uma relação da forma $x^{(k)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))$, com $F: U \to R^{dk}$, onde R representa os reais, contínua no aberto $U \subset R^{1+dk}$.

Dizemos que as soluções de equações diferenciais são curvas conexas e definidas em um intervalo. Denota-se como $\gamma(t): I \to R^d$.

A partir do estudo de soluções, enuncia-se o teorema de existência e unicidade.

Teorema: Seja $F: U \to R^d$ contínua no aberto $U \subset R^{1+d}$ e localmente lipschitziana em x. Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe uma e somente uma solução do problema de valor inicial em algum intervalo aberto contendo t_0.

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ \gamma(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Para prova deste teorema, foi necessário a utilização de três diferentes proposições que também foram demonstradas, são ela:

1. Seja $F: U \to R^d$ contínua no aberto $U \subset R^{1+d}$. Dado $(t_0, x_0) \in U$, uma função contínua $\gamma: I \to R^d$, sendo I um intervalo aberto e $t_0 \in I$, é uma solução do problema de valor inicial se e somente se $\left\{\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, x(s)\big) ds\right.$ para qualquer $t \in I$;
2. O conjunto X das funções contínuas e limitadas $\gamma: I \to R^d$ é um espaço métrico completo com a distância $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup\{\big||\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|\big| : t \epsilon I\}$;
3. Se $T: X \to X$ é uma contração em um espaço métrico completo (X, d), então T tem um e somente um ponto fixo em X e converge para ele.

Feito isso, é possível provar o teorema. É de grande importância compreender o significado que isso traz para o estudo qualitativo, onde para cada $t \in I$, haverá apenas uma solução, ou seja, ela é única.

Uma solução é dita maximal de um conjunto se dado $\gamma: I \to R^d$ se não existe $\gamma_1: I_1 \to R^d$ tal que $\gamma \leq \gamma_1$ e $\gamma \neq \gamma_1$.

Foi estudado a dependência contínua em relação a parâmetros. O teorema diz que quando se varia o parâmetro $\mu \, \epsilon \, R^p$, existe uma família de equações diferenciais e as soluções variam continuamente com os parâmetros. É fundamental compreender isso para ser introduzido o estudo de sistemas epidemiológicos, uma vez que eles contam com diversos parâmetros que representam taxas importantes para o estudo.

Inicia-se o estudo de epidemiologia pelo número básico de reprodução e número efetivo de reprodução, denotados por R_0 e R_t.

O R_0 é o número de pessoas que serão infectadas partir de uma única pessoa já infectada no início da disseminação da doença, antes das medidas de prevenção. Seu estudo é muito importante para compreender a velocidade de espalhamento de uma doença. Dizemos que se $R_0 > 1$ temos um surto ou epidemia.

Com o passar do tempo, é esperado que medidas de contenção da dispersão da doença sejam tomadas e que parte da população esteja imunizada. Chamamos de R_t o número médio de pessoas infectadas em determinado momento t por um indivíduo infectado.

No presente trabalho, foram estudados 3 modelos epidemiológicos a fim de encontrar a melhor forma de modelar os casos no Brasil, foram ele:

- Modelo SIR
  Este modelo é o mais popular e estudado. Muitos outros sistemas são deduzidos e criados a partir do estudo e variação deste. Nele é dito que uma pessoa, durante um surto de uma doença, pode-se encontrar em um dos três diferentes estados: **S**uscetíveis, **I**nfecciosos ou **R**emovidos. Nesse sistema, não é feito distinção de pessoas que morreram ou foram recuperadas, ocupando assim a mesma classe que é de removidos;
- Modelo SIRS
  Neste modelo, a população pode-se encontrar em três diferentes estados: **S**uscetíveis, **I**nfecciosos ou **R**ecuperados. Uma fração da população recuperada se torna suscetível a doença novamente e supomos que não ocorrerão mortes;
- Modelo SIRD
  As pessoas são divididas em quatro diferentes estados: **S**uscetíveis, **I**nfecciosos, **R**ecuperados ou Mortos (**D**eads). Supomos que não existem casos de reinfecção.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

A partir do estudo realizado, será proposto o estudo do modelo SIRSD, onde a população pode encontrar-se nos estados de **S**uscetíveis, **I**nfecciosos, **R**ecuperados ou Mortos, mas com probabilidade de reinfecção.

As equações utilizadas para este modelo foram:

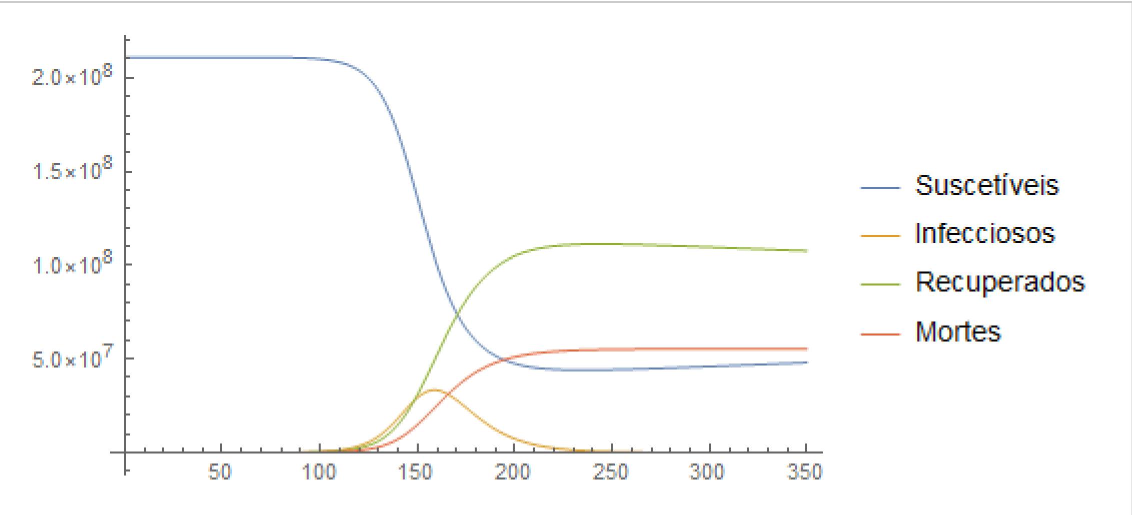
$$\begin{cases} \dfrac{\delta S}{\delta t} = \dfrac{-\beta I S}{N} + \rho R \\ \dfrac{\delta I}{\delta t} = \dfrac{\beta I S}{N} - \gamma I - \mu I \\ \dfrac{\delta R}{\delta t} = \gamma I - \rho R \\ \dfrac{\delta D}{\delta t} = \mu I \end{cases}$$

onde β, γ, μ, ρ são parâmetros.

Baseado em dados reais, temos os seguintes valores:

Expressão	**Significado**	**Valor**
S	População Suscetível	$S(0) = 210999980$
I	População Infectada	$I(0) = 20$
R	População Recuperada	$R(0) = 0$
D	Mortos	$D(0) = 0$
N	População total	211000000
β	Taxa de transmissão	0,2
γ	Taxa de recuperação	0,0667
μ	Taxa de mortalidade	0,032
ρ	Fração de recuperados que se tornam suscetíveis	0,00038

Baseado nesses dados, é possível construir a projeção do COVID-19 no Brasil:



CONCLUSÕES:

O presente trabalho tem como intuito demonstrar a importância do isolamento social, de medidas de higiene e a necessidade de vacinação. Tais medidas visam diminuir a taxa de transmissão β, com intuito de diminuir a disseminação da doença.

Hoje, segundo o site “COVID-19 ANALYTICS”, o R_t no Brasil é de 0,89. Se medidas tivessem sido tomadas desde o início da pandemia de modo que o R_0 tivesse esse valor, a taxa de transmissão seria aproximadamente 0,07, o que não caracterizaria pandemia, como vivemos hoje em dia. Então fiquem em casa, tomem todo cuidado possível e vacinem-se o mais rápido possível.

BIBLIOGRAFIA

BARREIRA, L.; VALLS, C. Ordinary differential equations, volume 137 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. Qualitative theory, Translated from the 2010 Portuguese original by the authors.

LAGES LIMA, E. Espaços Métricos. 3.ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1993.

KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. Canada: Wiley, 1989.

LAGES LIMA, E. Análise Real volume 1. Funções de uma variável. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

SOTOMAYOR, J. Lições de equações diferenciais ordinárias. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

MARTINS MENDES, A. Uma breve introdução ao estudo da análise do n. 2017. 56 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9834/2/Arquivototal.pdf. Acesso em: 13/11/2020.

SILVA DUARTE, I. Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. 2014. 54 p. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/6734/1/PDF%20-%20Isabella%20Silva%20Duarte.pdf. Acesso em: 17/10/2020.

HIRSCH, M.; SMALE, S.; DEVANEY R. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2013.

HALE, J. Ordinary Differential Equations. EUA: Courier Corporation, 2009.

MUNIZ OLIVA, O. Equações diferenciais ordinárias. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1971.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. IBGE apoiando o Combate à COVID-19. Disponível em: https://covid19.ibge.gov.br/. Acesso em: 27/02/2021.

Fundação SEADE - Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados. SP contra o novo coronavírus. Boletim Completo. Disponível em: https://www.seade.gov.br/coronavirus/. Acesso em: 02/03/2021.

COVID-19 ANALYTICS. Disponível em: https://covid19analytics.com.br/. Acesso em: 17/08/2021