Coberturas Duplas por Ciclos Pequenas de Classes de Grafos Circulantes

Palavras-Chave: Cobertura Dupla por Ciclos, Potências de Ciclos, Grafos Circulantes

João Vianini[a,1], C. N. Campos[a]

[a] Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas

[1] Participante do PICV-Unicamp

Introdução

Seja G um grafo simples em que $V(G)$ é seu conjunto de *vértices* e $E(G)$ é seu conjunto de *arestas*. Denotamos uma aresta $e \in E(G)$ com *extremos* $u, v \in V(G)$ por uv. O *grau* de um vértice $u \in V(G)$ é denotado por $d(u)$. Se $d(v) = k$ para todo $v \in V(G)$, então dizemos que G é um grafo k-*regular*.

Um grafo G é um *ciclo* se os seus vértices podem ser arranjados em uma sequência cíclica de maneira que dois vértices são adjacentes se, e somente se, são consecutivos na sequência. Seja H um subgrafo de G isomorfo a um ciclo. Se $V(H) = V(G)$, dizemos que H é um *ciclo hamiltoniano*. Um grafo G é *conexo* se, para qualquer partição de $V(G)$ em dois subconjuntos não vazios X e Y, existe ao menos uma aresta em $E(G)$ com um extremo em X e o outro em Y. As *componentes conexas* de G são os seus subgrafos conexos maximais. Se S é um subconjunto de $E(G)$, então a *remoção de* S produz o grafo $G - S$, em que $V(G - S) = V(G)$ e $E(G - S) = E(G) \setminus S$. No caso em que $S = \{e\}$, denotamos $G - S$ por $G - e$. Uma aresta e tal que $G - e$ possui mais componentes conexas que G é denominada *aresta de corte*.

Em Teoria de Grafos estrutural, buscamos derivar propriedades a partir da análise da estrutura de um grafo. Uma ferramenta poderosa para atingir esse objetivo são as decomposições, que particionam um grafo em uma família de subgrafos satisfazendo determinadas propriedades. Formalmente, uma *decomposição* de um grafo G é uma família $\mathcal{F}$ de subgrafos aresta-disjuntos de G tais que $\cup_{H \in \mathcal{F}} E(H) = E(G)$. É frequente exigir que os grafos da família $\mathcal{F}$ tenham propriedades adicionais. De particular importância para a área é o caso em que cada membro de $\mathcal{F}$ é isomorfo a um ciclo. Uma decomposição com essa propriedade é denominada *decomposição em ciclos*.

Em 1912, O. Veblen [8] mostrou que um grafo G admite uma decomposição em ciclos se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Veblen*. Quando um grafo G possui alguns vértices de grau ímpar, ele não admite uma decomposição em ciclos. Portanto, se quisermos dividir o grafo G em subgrafos que são ciclos, algumas arestas devem aparecer em mais de um subgrafo. Formalmente, uma *cobertura* de G é uma família $\mathcal{C}$ de subgrafos de G em que $\cup_{H \in \mathcal{C}} E(H) = E(G)$. Uma *cobertura por ciclos* é uma cobertura em que cada subgrafo da família é isomorfo a um ciclo.

Uma cobertura por ciclos de um grafo G, em que cada aresta aparece em exatamente dois ciclos da cobertura, é chamada de *cobertura dupla por ciclos* de G. De forma independente, G. Szekeres [7] em 1973, e P. D. Seymour [6] em 1979, propuseram uma conjetura que afirma que todo grafo sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por ciclos. Essa conjetura ficou conhecida como *Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos* (CCDC) e permanece aberta até hoje. A CCDC é um problema muito importante em Teoria de Grafos, que tem conexões com outros problemas da área ou de áreas correlatas como Topologia, e tem produzido um vasto conjunto de resultados na literatura [9]. Seu estudo ao longo dos anos deu origem a diversas variantes, em particular, aquela que é objeto de interesse deste trabalho. Em 1990, J. A. Bondy [3] propôs a seguinte conjetura, que ficou conhecida como a *Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos Pequena.*

Conjetura 1 (Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos Pequena)**.** *Todo grafo simples com n vértices e sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por ciclos com até $n-1$ ciclos.*

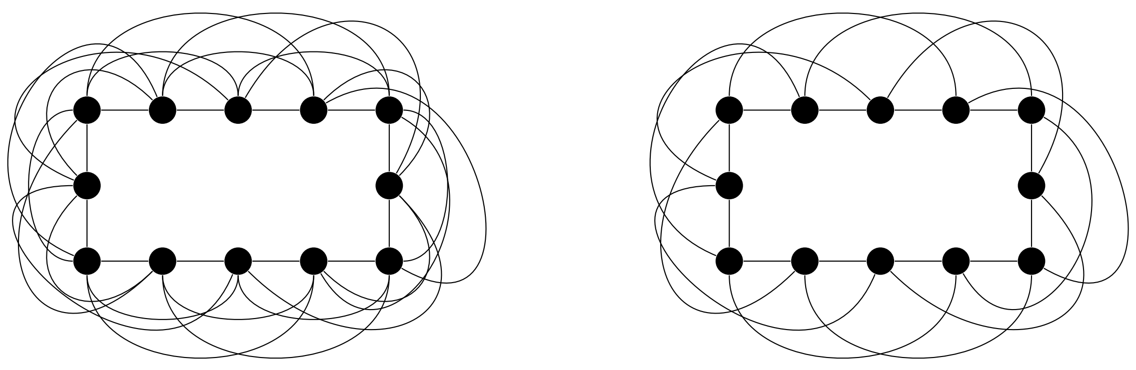
Essa conjetura foi verificada por Bondy [3] para a classe dos grafos completos, a classe dos grafos bipartidos completos, grafos planares com até $2|V(G)|-3$ arestas e triangulações simples. K. Seyffarth [5] mostrou que grafos planares 4-conexos também admitem coberturas duplas por ciclos pequenas e J. M. Fish et al. [4] mostraram que grafos linha de grafos mulitpartidos completos também admitem tais coberturas.

Neste trabalho, verificamos a Conjetura 1 para algumas subclasses dos grafos circulantes. Estes resultados estão apresentados na seção Resultados. A próxima seção introduz as classes de grafos consideradas e alguns resultados auxiliares.

Preliminares

Seja $r_1, r_2, \ldots, r_k$ uma sequência estritamente crescente (não vazia) de inteiros positivos, de forma que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $1 \leq r_i < n/2$. Um *grafo circulante* $C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ é um grafo simples G em que $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, $E(G) = E^{r_1} \cup E^{r_2} \cup \cdots \cup E^{r_k}$ e $v_i v_j \in E^{r_i}$ se, e somente se, $\min\{(j-i) \pmod n, (i-j) \pmod n\} = r_i$. O conjunto E^{r_i} é chamado de conjunto de arestas de *alcance* r_i. O conjunto de todos os alcances de um grafo circulante é denotado por $\mathcal{R}$, ou seja, $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Além disso, se $e \in E^{r_i}$, dizemos que e tem *alcance* r_i. A Figura 1 mostra dois grafos circulantes com 12 vértices.

Se $\mathcal{R} = \{i \mid 1 \leq i \leq k\}$, dizemos que o grafo circulante $C_n(1, 2, \ldots, k)$ é uma *potência de ciclos* e o denotamos por C_n^k. O grafo da Figura 1(a) é uma potência de ciclos. Se $k \equiv 0 \pmod 2$ e é possível particionar $\mathcal{R}$ de maneira que cada parte possua dois elementos e, para toda parte $\{r_i, r_j\}$, $\gcd(r_i, r_j, n) = 1$, então o grafo $C_n(r_1, r_2 \ldots, r_k)$ é chamado *circulante alcance-pareável.*



(a) $C_{12}(1,2,3) = C_{12}^3$.　　　(b) $C_{12}(1,3)$.

Figura 1: Dois grafos circulantes: na figura (a) $\mathcal{R} = \{1,2,3\}$; na figura (b) $\mathcal{R} = \{1,3\}$.

Seja G um grafo circulante $C_n(r_1, \ldots, r_k)$. Por construção, para cada alcance $r \in \mathcal{R}$, existem duas arestas incidentes em cada $v_i \in V(G)$: $v_i v_{(i+r) \pmod n}$ e $v_i v_{(i-r) \pmod n}$. Logo, G é um grafo $2k$-regular. Pelo Teorema de Veblen, todo grafo circulante possui uma decomposição em ciclos. Assim, uma forma de se obter uma cobertura por ciclos pequena de G é obter uma decomposição do grafo com até $(n-1)/2$ ciclos, denominada *decomposição em ciclos pequena.* Dessa forma, utilizando cada um desses ciclos duas vezes, obtemos uma cobertura dupla por ciclos pequena para G.

Para finalizar essa seção, apresentamos três lemas importantes para as demonstrações dos resultados obtidos.

Lema 2 (Boesch e Tindell [2]). *O grafo circulante* $C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ *é conexo se, e somente se,* $\gcd(n, r_1, r_2, \ldots, r_n) = 1$. □

Lema 3. *Seja* $G = C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ *e* $g = \gcd(n, r_1, r_2, \ldots, r_k)$*. Então,* G *pode ser decomposto em* g *cópias do circulante* $C_{n/g}(r_1/g, r_2/g, \ldots, r_k/g)$. □

Lema 4 (Bermond et al. [1]). *Seja* G *um grafo circulante conexo em que todos os vértices possuem grau igual a quatro. Então,* G *admite uma decomposição em dois ciclos hamiltonianos.* □

Resultados

Este trabalho de pesquisa foi feito em parceria com L. M. Tateishi e Eduardo Vasconcellos, coautores de todos os resultados obtidos e participantes do PIBIC-Unicamp.

O primeiro resultado obtido, apresentado no Teorema 5, aborda as potências de ciclo. Para a construção da prova, fazemos uso do Lema 4, extraído do artigo de Bermond et al. [1] e aplicado no contexto dos grafos circulantes. Embora a demonstração apresentada para o Teorema 5 tenha sido feita independentemente, as suas ideias haviam sido delineadas por Bermond et al. [1] no final do seu artigo.

Teorema 5. *Seja* $G = C_n^k$ *uma potência de ciclos. Então,* G *admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.*

Demonstração. Seja $G \cong C_n^k$. Se n é ímpar e $k = (n-1)/2$, então G é isomorfo a um grafo completo e o resultado segue. Podemos supor $k < \frac{n-1}{2}$. Consideramos dois casos dependendo da paridade de k.

Caso 1. $k \equiv 0 \pmod 2$. Seja $\mathcal{F} = \{G_1, \ldots, G_{\frac{k}{2}}\}$ uma decomposição de G tal que cada $G_i \cong C_n(2i-1, 2i)$. Seja $G_i \in \mathcal{F}$. Por construção, cada G_i é 4-regular. Como $\gcd(l, l+1) = 1$, então G_i é conexo. Logo, pelo Lema 4, G_i pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos. Dessa forma, obtemos uma decomposição pequena para G com extatamente k ciclos e, a partir dela, uma cobertura dupla pequena com exatamente $2k \leq n-1$ ciclos.

Caso 2. $k \equiv 1 \pmod 2$. Seja $\mathcal{F} = \{C_n(1), C_n(2, \ldots, k)\}$ uma decomposição de G. O grafo $C_n(1)$ é isomorfo a um ciclo hamiltoniano de G e o grafo $C_n(2, \ldots, k)$ pode ser decomposto em $\{G_1, \ldots, G_{\frac{k-1}{2}}\}$ em que $G_i \cong C_n(2i, 2i+1)$. De forma análoga ao *Caso* 1., obtemos uma decomposição pequena $\mathcal{G}$ para o $C_n(2, \ldots, k)$ com exatamente $k-1$ ciclos. Logo, a união do $C_n(1)$ com $\mathcal{G}$ forma uma decomposição em ciclos pequena para G com exatamente k ciclos e o resultado segue como no caso anterior. □

O segundo resultado obtido está estabelecido no Teorema 6.

Teorema 6. *Seja* $G = C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$*, um grafo circulante. Então,*

(i) Se $k \equiv 0 \pmod 2$ *e o grafo é um grafo alcance-pareável, então* G *admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.*

(ii) Se $k \equiv 1 \pmod 2$ *e, quando* $|\mathcal{R}| > 1$*, existe um alcance* $r \in \mathcal{R}$ *tal que* $G - E^r$ *é isomorfo a um grafo circulante alcance-pareável, então* G *admite uma cobertura dupla por ciclos pequena sempre que* $k \leq 5$.

Esboço de demonstração. A estratégia de prova envolve uma heurística gulosa que calcula o tamanho de uma decomposição em ciclos de um grafo circulante $C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ e está apresentada no Algoritmo 1.

Para mostrar o item (i), note que quando o grafo circulante G tem um número par de alcances e existem pareamentos de todos os alcances com alcances primos entre si (casos que caem nos laços *enquanto* das linhas 4 e 7), então G é decomposto em $2 \cdot (k/2) = k$ ciclos. Como k é par e $k < n/2$, $k \leq n/2 - 1$ se n é par ou $k \leq (n-1)/2$ se n é ímpar. Então, temos uma decomposição em até $(n/2 - 1)$ ciclos se n é par ou $(n-1)/2$ ciclos se n é ímpar. Em ambos os casos, tomando cada um dos ciclos dessas decomposições duas vezes, obtemos coberturas duplas por até $n-1$ ciclos e, portanto, G admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.

Algoritmo 1 Procedimento recursivo da heurística gulosa para encontrar o tamanho de uma decomposição em ciclos de um grafo circulante

1: **procedimento** $CirculantCD(\mathcal{R}, n)$
 $\triangleright$ Entrada: Conjunto de alcances $\mathcal{R}$ e ordem n de um grafo circulante G
 $\triangleright$ Saída: Cardinalidade p de uma decomposição em ciclos de G
2: $p \leftarrow 0$
3: **se** $|\mathcal{R}| > 1$ **então**
4: **enquanto** existem $i \in \mathcal{R}$ e $j \in \mathcal{R}$ tais que $\gcd(i, j) = 1$, $\gcd(n, i) > 1$ e $\gcd(n, j) > 1$ **faça**
5: $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \setminus \{i, j\}$
6: $p \leftarrow p + 2$
7: **enquanto** existe $i \in \mathcal{R}$ tal que $\gcd(n, i) = 1$ **faça**
8: Escolha $j \in \mathcal{R}$ tal que $\gcd(n, j)$ é máximo
9: $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \setminus \{i, j\}$
10: $p \leftarrow p + 2$
11: **se** $\mathcal{R} = \varnothing$ **então devolva** p
12: **se** $|\mathcal{R}| = 1$ **então**
13: Seja i o elemento de $\mathcal{R}$
14: $p \leftarrow p + \gcd(n, i)$
15: **devolva** p
16: Seja g o maior divisor comum entre n e todos os elementos atuais de $\mathcal{R}$
17: $\mathcal{R}' \leftarrow \{x/g \mid x \in \mathcal{R}\}$
18: **devolva** $p + g \cdot CirculantCD(\mathcal{R}', n/g)$

Para mostrar o item (ii), seja G um grafo circulante com k alcances de forma que exista um alcance r tal que $G - E^r$ é isomorfo a um grafo circulante alcance-pareável G'. Note que todos os alcances, com exceção de r, são removidos nos laços **enquanto** das linhas 4 e 7. Quando o algoritmo chega à linha 12, $\mathcal{R} = \{r\}$ e, nesse momento, $p = k - 1$, uma vez que, pelo item (i), grafos alcance-pareáveis com $l \equiv 0 \pmod 2$ alcances admitem decomposições em l ciclos hamiltonianos. Para que G admita uma decomposição em ciclos pequena, a inequação seguinte deve ser satisfeita:

$$k - 1 + \gcd(n, r) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Substituindo os valores possíveis de k chegamos a vários subcasos, levando em conta a paridade de n que altera o valor da função piso aplicada. Trabalhando cada um desses subcasos individualmente, foi possível chegar a conclusão que, sempre que $k \leq 5$, G admite uma decomposição em ciclos pequena e, por consequência, uma cobertura dupla por ciclos pequena.

Para exemplificar como a demonstração é construída, finalizamos esse esboço com a análise do caso em que $k = 3$ e n é par. Nesse caso, $3 - 1 + \gcd(n, r) \leq \frac{n}{2} - 1$, isto é, $\gcd(n, r) \leq \frac{n-6}{2}$.

Se $\gcd(n, r) \leq \frac{n-6}{2}$, o resultado segue. Resta analisar o caso em que $\gcd(n, r) > \frac{n-6}{2}$. Como $r < n$, temos que $\gcd(n, r) \leq r \leq \frac{n-2}{2}$. Isso implica que $\gcd(n, r) \in \mathcal{I}$ em que $\mathcal{I} = \{\frac{n-5}{2}, \frac{n-4}{2}, \frac{n-3}{2}, \frac{n-2}{2}\}$. Como n é par, somente $\frac{n-4}{2}$ e $\frac{n-2}{2}$ são inteiros. Se $\gcd(n, r) = \frac{n-4}{2}$, então existem inteiros a e b tais que

$$a\frac{n-4}{2} = n \qquad e \qquad b\frac{n-4}{2} = r, \tag{1}$$

ou seja, $n/a = r/b$. Considerando que $r \geq \gcd(n, r) = \frac{n-4}{2}$ e $r < n/2$, temos duas opções: ou $r = (n-4)/2$; ou $r = (n-2)/2$. Em ambos os casos, mostramos que não existem a e b inteiros que satisfaçam (1). Portanto, esse caso não ocorre. O caso em que $\gcd(n, r) = \frac{n-2}{2}$ nos leva a uma conclusão similar. Logo, quando $k = 3$ e n é par, o resultado segue. $\square$

Observe, no esboço de demonstração do Teorema 6, que a análise final de casos depende do tamanho do conjunto $\mathcal{I}$, que cresce bastante conforme $|\mathcal{R}|$ cresce. Por isso, neste trabalho, os resultados limitaram-se a $|\mathcal{R}| \leq 5$.

Conclusão

Neste trabalho, verificamos a Conjetura 1 para duas classes de grafos circulantes. Para grafos circulantes arbitrários, utilizando uma implementação em *Python* do Algoritmo 1, constatamos que aqueles que possuem ordem menor ou igual a 15 verificam a Conjetura 1.

Nossa estratégia gulosa, entretanto, tem limitações. Existem casos em que ela não devolve um número de ciclos suficientemente pequeno. Como exemplo, considere o grafo circulante com 240 vértices e $\mathcal{R} = \{6i \mid 1 \leq i \leq 19\} \cup \{25, 26, 32, 33, 45, 46\}$ Os pares de alcances 25 e 26, 32 e 33 e 45 e 46 são removidos no laço da linha 4, resultando em $p = 6$. O grafo circulante restante é decomposto em 6 cópias da potência de ciclos C_{40}^{19} que é decomposta em 19 ciclos. Assim, $p = 6 + 6 \cdot 19 = 120$, o que gera uma cobertura dupla com 240 ciclos, excedendo em um o desejado.

Nossa análise do funcionamento do algoritmo nos levou a propor a Conjetura 7, em que c é definido como segue. Se a chamada do algoritmo é com o conjunto de alcances original, $c = n/2 - 1$ caso n seja par, ou $n - 1/2$ caso n seja ímpar. Se a chamada for recursiva, então $c = (c' - p')/g'$ em que c', p' e g' são os valores de c, p e g da chamada anterior.

Conjetura 7. *O algoritmo devolve o tamanho de uma decomposição em ciclos do grafo circulante que é uma decomposição em ciclos pequena se, e somente se, para toda chamada do algoritmo, após os laços das linhas* 4 *e* 7*, vale a seguinte desigualdade:* $|\mathcal{R}| \cdot g' \leq c$.

Referências

[1] Bermond, J.-C., Favaron, O. e Mahéo, M. "Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree 4". Em: *Journal of Combinatorial Theory. Series B* 46.2 (1989), pp. 142–153.

[2] Boesch, F. e Tindell, R. "Circulants and their connectivities". Em: *Journal of Graph Theory* 8.4 (1984), pp. 487–499.

[3] Bondy, J. A. "Small cycle double covers of graphs". Em: *Cycles and rays (Montreal, PQ, 1987).* Vol. 301. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, pp. 21–40.

[4] Fish, J. M., Klimmek, R. e Seyffarth, K. "Line graphs of complete multipartite graphs have small cycle double covers". Em: *Discrete Mathematics* 257.1 (2002), pp. 39–61.

[5] Seyffarth, Karen. "Small cycle double covers of 4-connected planar graphs". Em: *Combinatorica. An International Journal on Combinatorics and the Theory of Computing* 13.4 (1993), pp. 477–482.

[6] Seymour, P. D. "Sums of circuits". Em: *Graph theory and related topics (Proc. Conf., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977).* Academic Press, New York-London, 1979, pp. 341–355.

[7] Szekeres, G. "Polyhedral decompositions of cubic graphs". Em: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 8 (1973), pp. 367–387.

[8] Veblen, Oswald. "An application of modular equations in analysis situs". Em: *Annals of Mathematics. Second Series* 14.1-4 (1912/13), pp. 86–94.

[9] Zhang, Cun-Quan. *Circuit double cover of graphs.* Vol. 399. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.