Coberturas Duplas por Ciclos Pequenas em Potências de Ciclos e Grafos Circulantes*

Palavras-Chave: coberturas duplas por ciclos, grafos circulantes, potências de ciclo

L. M. Tateishi[1]
C. N. Campos[1]
[1]Instituto de Computação – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

Introdução

Seja G um grafo simples com $V(G)$ seu conjunto de *vértices* e $E(G)$ seu conjunto de *arestas*. O *grau* de um vértice $v \in V(G)$ é denotado por $d(v)$. Um grafo em que todo vértice tem grau k é denominado *k-regular*. Dado $S \subseteq V(G)$, $G[S]$ é o *subgrafo* de G *induzido* por S. Um grafo G é dito conexo se, para toda bipartição $\{X, Y\}$ de G, existe pelo menos uma aresta de G com um extremo em X e outro em Y. Uma *aresta de corte* e em um grafo conexo G é uma aresta cuja remoção de G produz o grafo $G - e$ que não é conexo. Um *ciclo* C_n com n vértices é um grafo cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência cíclica tal que dois vértices são adjacentes se, e somente se, são consecutivos na sequência. Se $H \subseteq G$ é um ciclo com $|V(G)|$ vértices, dizemos que H é um *ciclo hamiltoniano*.

Uma *cobertura* de G é uma família $\mathcal{G}$ de subgrafos de G tal que $\cup_{G' \in \mathcal{G}} E(G') = E(G)$. Se cada membro de $\mathcal{G}$ é isomorfo a um ciclo, então $\mathcal{G}$ é uma *cobertura por ciclos*. Para que um grafo possua uma cobertura por ciclos, todas suas arestas devem fazer parte de pelo menos um ciclo. De fato, uma condição necessária e suficiente para que um grafo tenha uma cobertura por ciclos é que ele não possua arestas de corte. Seja $\mathcal{G}$ uma cobertura de um grafo G. Se cada aresta aparece exatamente duas vezes, $\mathcal{G}$ é dita uma *cobertura dupla*. Generalizando, se cada aresta aparece exatamente k vezes, temos uma k-cobertura. Uma 1-cobertura é conhecida na literatura como *decomposição*. Se G possui uma decomposição em subgrafos $G_1, ..., G_l$, dizemos que G pode ser *decomposto* em $G_1, ..., G_l$.

Embora decidir a existência de coberturas por ciclos seja um problema bem resolvido, decidir se um grafo conexo possui uma cobertura dupla por ciclos é um problema que tem desafiado pesquisadores desde a década de 1970 [7]. As primeiras ocorrências desse problema na literatura são devidas a G. Szekeres [7] em 1973 e, independentemente, a P. Seymour [6] em 1979. Nesses trabalhos, os autores propuseram a Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos, apresentada a seguir.

Conjetura 1 (Conjetura da Cobertura Dupla por Ciclos, CCDC)**.** *Todo grafo sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por ciclos.*

---

*Desenvolvido com o apoio do CNPq.

Segundo Zhang [8], a origem da Conjetura 1 é incerta. Alguns matemáticos a atribuem a W. T. Tutte. Entretanto, o próprio Tutte disse, em uma comunicação pessoal, que a conjetura já circulava em conversações matemáticas muito antes de ser publicada. A profundidade e abrangência dessa conjetura fizeram da CCDC um dos problemas mais famosos em Teoria de Grafos. Seu estudo gerou diversos resultados na literatura, bem como novas técnicas e diferentes abordagens. Além disso, novas variantes do problema foram propostas e permanecem em estudo.

Neste projeto de pesquisa, estamos interessados na variante proposta por A. Bondy em 1990. Para compreendê-la, precisamos definir uma cobertura com um número limitado de ciclos: dado um grafo G, uma cobertura dupla composta de até $|V(G)| - 1$ subgrafos é dita *pequena*.

Conjetura 2 (Conjetura da Cobertura Dupla Pequena por Ciclos, CCDPC)**.** *Todo grafo sem arestas de corte admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.*

Resultados

Neste trabalho, verificamos a Conjetura 2 para algumas classes de grafos circulantes. A pesquisa desenvolvida foi feita em parceria com dois outros estudantes de Iniciação Científica do PIBIC: J. Vianini e E. Vasconcellos. Todos os resultados foram obtidos conjuntamente. Para apresentá-los, algumas definições adicionais se fazem necessárias.

Seja $\mathcal{R} = \{1, 2, ..., k\}$ um conjunto não vazio de inteiros que satisfaz $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ para um inteiro $n \geq 2$. Uma *potência de ciclos* é um grafo simples $G = C_n^k$ com $V(G) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$ e $E(G) = E^1 \cup E^2 \cup ... \cup E^k$ com $\{v_i v_j\} \in E^l$ se, e somente se, $l = \min\{(j - i) \bmod n, (i - j) \bmod n\}$. Se $e \in E^l$, então e tem *alcance* l. Além disso, o conjunto $\mathcal{R}$ é chamado de *conjunto de alcances* de G. A Figura 1 ilustra uma potência de ciclos.

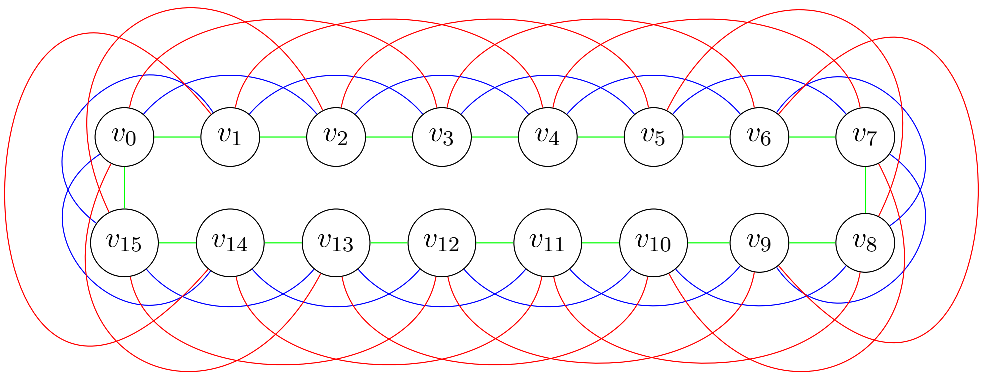

Figura 1: Grafo C_{15}^3, com as arestas de E^1, E^2 e E^3 identificadas pelas cores verde, azul e vermelho, respectivamente.

Seja $\mathcal{R} = \{r_1, ..., r_k\}$ um conjunto não vazio de inteiros que satisfazem $1 \leq r_1 < ... < r_k \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Um *grafo circulante* $G = C_n(r_1, ..., r_k)$ é um grafo simples com $V(G) = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$ e $E(G) = E^{r_1} \cup ... \cup E^{r_k}$ com $\{v_i v_j\} \in E^{d_l}$ se, e somente se, $d_l = \min\{(j - i) \bmod n, (i - j) \bmod n\}$. Note que as potências de ciclos C_n^k são uma subclasse dos circulantes em que o conjunto de alcances é $\mathcal{R} = \{1, 2, ..., k\}$.

Da definição dos grafos circulantes, concluímos que em cada vértice incidem duas arestas de cada um dos alcances possíveis. Logo, esses grafos são $2|\mathcal{R}|$-regulares. Por exemplo, o grafo $C_{15}^3 = C_{15}(1, 2, 3)$ é 6-regular. Duas outras propriedades bem conhecidas estão estabelecidas nos Lemas 3 e 4.

Lema 3 (F. Boesch, R. Tindell [2])**.** *Um grafo circulante $C_n(r_1, r_2)$ é conexo se, e somente se, o máximo divisor comum entre r_1, r_2 e n é um, isto é,* $\gcd(r_1, r_2, n) = 1$. $\square$

Lema 4 (J. Meidanis [5])**.** *Dado $G = C_n(r_1, r_2, ..., r_k)$, o subgrafo H tal que $V(H) = V(G)$ e $E(H) = E^{r_l}$ para algum $l \leq k$ tem $\gcd(l, n)$ componentes conexas e cada uma é um ciclo de tamanho $n/\gcd(l, n)$.* □

No nosso primeiro resultado, o Teorema 6, verificamos a Conjetura 2 para as potências de ciclo. Embora desenvolvido independentemente, esse resultado já existia na literatura [1]. Nossa demonstração faz uso do Lema 5, provado por J. -C. Bermond et al. [1].

Lema 5 (J. -C. Bermond et al. [1])**.** *Todo circulante conexo e 4-regular pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos.* □

Teorema 6. *Seja $G = C_n^k$ uma potência de ciclos. Então, G possui uma cobertura dupla por ciclos pequena.*

Demonstração. Seja $G \cong C_n^k$ com k par. Seja $\mathcal{H} = \{H_l \cong C_n(2l-1, 2l) \mid 1 \leq l \leq k/2\}$. Como $\gcd(2l-1, 2l, n) = 1$, pelo Lema 3, cada H_i é conexo. Além disso, em cada vértice de cada H_i incidem quatro arestas, sendo duas de cada alcance possível. Logo, H_i é 4-regular e, pelo Lema 5, pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos H_i^1 e H_i^2. Assim, $\mathcal{D} = \{H_i^1, H_i^2 \mid 1 \leq i \leq k/2\}$ é uma decomposição de G com exatamente k ciclos. Então, duplicando cada um desses ciclos, obtemos uma cobertura dupla por $2k$ ciclos. Como $k \leq \frac{n-1}{2}$, então $2k \leq n-1$ ciclos. Portanto, essa cobertura é pequena.

Considere, agora, $G \cong C_n^k$ com k ímpar. Seja $\mathcal{H} = \{H_l \cong C_n(2l, 2l+1) \mid 1 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor\}$. Pelo Lema 5, cada H_i pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos H_i^1 e H_i^2. De maneira análoga ao caso em que k é par, temos que $\mathcal{D} = \{H_i^1, H_i^2 \mid 1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor\}$ é uma decomposição de $G - E^1$ com exatamente $k-1$ ciclos. Além disso, note que o subgrafo induzido pelas arestas de E^1 é isomorfo a um ciclo hamiltoniano C_n. Então, $\mathcal{D} \cup \{C_n\}$ é uma decomposição de G com exatamente k ciclos. Como no caso anterior, essa decomposição pode ser estendida para uma cobertura dupla com $2k$ ciclos. Como $2k \leq 2 \cdot \frac{n-1}{2} = n-1$, essa cobertura é pequena. □

O segundo resultado obtido foi a verificação da Conjetura 2 para dois outros casos de grafos circulantes. Para apresentá-lo, precisamos de uma definição adicional. Seja $C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ um grafo circulante tal que $k \equiv 0 \pmod 2$. Se é possível particionar $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ de maneira que cada parte possua dois elementos e, para toda parte $\{r_i, r_j\}$, $\gcd(r_i, r_j, n) = 1$, então o grafo $C_n(r_1, r_2 \ldots, r_k)$ é chamado de *circulante alcance-pareável.*

Teorema 7. *Seja $G = C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ um grafo circulante. Então,*

(i) Se $k \equiv 0 \pmod 2$ e o grafo é alcance-pareável, então G admite uma cobertura dupla por ciclos pequena.

(ii) Se $k \equiv 1 \pmod 2$ e, quando $|\mathcal{R}| \geq 3$, existe um alcance $r \in \mathcal{R}$ tal que se as arestas de E^r forem removidas de G, o resultado é um grafo alcance-pareável, então G admite uma cobertura dupla por ciclos pequena sempre que $k \leq 5$.

Esboço da demonstração. Seja $G = C_n(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ um grafo circulante.

Suponha $k \equiv 0 \pmod 2$ e que G seja alcance-pareável. Então, o conjunto de alcances pode ser particionado em pares, de maneira que, para cada parte $\{r_i, r_j\}$, $\gcd(r_i, r_j, n) = 1$. Considere uma parte $\{r_i, r_j\}$ arbitrário e o subgrafo $H \subseteq G$ com $V(H) = V(G)$ e $E(H) = E^{r_i} \cup E^{r_j}$. Então, pelo Lema 3, H é conexo e, consequentemente, pelo Lema 5, pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos. Note que esses ciclos também são ciclos hamiltonianos de G. Como o mesmo raciocínio vale para todas as partes da partição de $\mathcal{R}$, então o grafo possui uma decomposição $\mathcal{C}$ em k ciclos hamiltonianos. Duplicando cada elemento de $\mathcal{C}$, obtemos uma cobertura dupla por ciclos de G, cuja cardinalidade é $2k \leq 2 \cdot \frac{n-1}{2} = n-1$. Portanto, G possui uma cobertura dupla por ciclos pequena.

Suponha $k \equiv 1 \pmod 2$. Inicialmente, considere $|\mathcal{R}| = 1$. Pelo Lema 4, o grafo possui $\gcd(r_1, n)$ componentes conexas isomorfas a ciclos. Logo, G possui uma decomposição por

$\gcd(r_1, n)$ ciclos e, consequentemente, uma cobertura dupla por $2\gcd(r_1, n)$ ciclos. Como $\gcd(r_1, n) \leq r_1 < \frac{n}{2}$, então $2\gcd(r_1, n) < n$ e a cobertura é pequena.

Agora, suponha $|\mathcal{R}| = 3$ e que, para algum alcance r_l, $H_1 = G - E^{r_l} = C_n(r_p, r_q)$ seja alcance-pareável, isto é, $\gcd(r_p, r_q) = 1$. Pelos Lemas 3 e 5, H_1 pode ser decomposto em dois ciclos hamiltonianos. Novamente, podemos estender a decomposição para uma cobertura dupla de H_1 de tamanho quatro. Por outro lado, segundo o Lema 4, $H_2 = C_n(r_l)$ possui $\gcd(r_l, n)$ componentes conexas que são ciclos, isto é, H_2 pode ser decomposto em $\gcd(r_l, n)$ ciclos e tem uma cobertura dupla de cardinalidade $2\gcd(r_l, n)$. Unindo as coberturas duplas de H_1 e H_2, obtemos uma cobertura dupla de G por $4+2\gcd(r_l, n)$ ciclos. Para que ela seja pequena, precisamos que $4+2\gcd(r_l, n) \leq n-1$, isto é, $\gcd(r_l, n) \leq \frac{n-5}{2}$.

Para concluir este caso, resta analisar os casos em que $\gcd(r_l, n) > \frac{n-5}{2}$, ou seja, quando $\gcd(r_l, n) \geq \frac{n-4}{2}$. Note que, como $r_l \geq \gcd(r_l, n)$, então $r_l \geq \frac{n-4}{2}$. Pela definição de grafo circulante, sabemos que $r_l \leq \frac{n-1}{2}$. Por isso, analisamos todos os casos em que $\frac{n-4}{2} \leq r_l \leq \frac{n-1}{2}$ e r_l é inteiro. Vamos exemplificar o caso em que $r_l = \frac{n-1}{2}$. A análise dos outros casos é similar. Quando $r_l = \frac{n-1}{2}$, existem a e b inteiros tais que $a \cdot \gcd(r_l, n) = n$ e $b \cdot \gcd(r_l, n) = r_l = \frac{n-1}{2}$, o que nos permite concluir que $\gcd(r_l, n) = \frac{1}{a-2b}$. Como a, b e $\gcd(r_l, n)$ são inteiros, temos que $\gcd(r_l, n) = 1$. Logo, nesse caso, temos uma cobertura dupla de H_2 com dois ciclos e uma cobertura dupla por ciclos de G com seis ciclos, que é pequena quando $k = 3$.

A demonstração é concluída com a análise do caso $|\mathcal{R}| = 5$, cujo raciocínio é similar ao caso $|\mathcal{R}| = 3$. □

Conclusões

Neste trabalho, a Conjetura da Cobertura Dupla Pequena por Ciclos foi verificada para as potências de ciclos e alguns casos dos grafos circulantes. Para auxiliar no processo de caracterização desses casos, foi criado o Algoritmo 1, que tenta parear o máximo de alcances possível, diminuindo a cardinalidade da cobertura dupla. O algoritmo recebe como entrada os alcances de um grafo circulante, o seu número de vértices e devolve o número de ciclos em uma decomposição do grafo. Consideramos que o algoritmo tem sucesso se ele devolve um número menor ou igual a $\frac{n-1}{2}$, pois duplicando esses ciclos obtemos uma cobertura dupla pequena.

Note que o gargalo do Algoritmo 2, rotina recursiva do Algoritmo 1, são os casos em que muitos alcances não satisfazem a condição de $\gcd(r_i, r_j, n) = 1$. Em alguns desses casos, o algoritmo não tem sucesso, pois devolve um número maior que $\frac{n-1}{2}$. Por exemplo, para o grafo circulante com 210 vértices e conjunto de alcances $\mathcal{R} = \{6k | 1 \leq k \leq 17\} \cup \{1, 70, 75, 76\}$, o algoritmo devolve $106 > \frac{n-1}{2} > 104$. Apesar de ainda não ter sido possível caracterizar os casos em que o algoritmo tem sucesso, ele nos auxiliou na caracterização dos casos de sucesso listados no Teorema 7.

Para trabalhos futuros, consideramos importante estabelecer uma boa caracterização dos casos nos quais o algoritmo falha e, se possível, implementar melhorias para que esses casos tenham sucesso. Outra possível abordagem do problema é por meio da construção de uma cobertura dupla, sem usar uma decomposição como passo intermediário.

Algoritmo 1 Heurística gulosa para encontrar o tamanho de uma decomposição em ciclos de um circulante

procedimento $CirculanteCD(S, n)$
 $\triangleright$ **Entrada:** Conjunto $S \subseteq \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ de alcances tal que $|S| = l$ e $n \in \mathbb{Z}$
 $\triangleright$ **Saída:** Inteiro p, tamanho de uma decomposição em ciclos do circulante
  $p \leftarrow 0$
  devolve $p + RecCirculanteCD(S, n)$

Algoritmo 2 Procedimento recursivo da heurística gulosa

procedimento $RecCirculanteCD(S, n)$
    se $|S| > 1$ **então**
        enquanto existem $i \in S$ e $j \in S$ tais que $\gcd(i, j) = 1$ **faça**
            $S \leftarrow S \setminus \{i, j\}$
            $p \leftarrow p + 2$
        enquanto existe $i \in S$ tal que $\gcd(n, i) = 1$ **faça**
            Escolha $j \in S$ tal que $\gcd(n, j)$ é máximo
            $S \leftarrow S \setminus \{i, j\}$
            $p \leftarrow p + 2$
    se $S = \varnothing$ **então devolve** p
    se $|S| = 1$ **então**
        Seja i o elemento de S
        $p \leftarrow p + \gcd(n, i)$
        devolve p
    $g \leftarrow \gcd(\{x \mid x \in S\}, n)$
    $S' \leftarrow \{x/g \mid x \in S\}$
    devolve $p + g \times RecCirculanteCD(S', n/g)$

Referências

[1] J. -C. Bermond, O. Favaron, M. Maheo. Hamiltonian decomposition of Cayley Graphs of Degree Four. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B 46, 142-153, 1989.

[2] F. Boesch, R. Tindell. Circulants and their connectivities. *Journal of Graph Theory*, 8(4): 487-499, 1994.

[3] J. A. Bondy. Small cycle double covers of graphs. *Cycles and Rays* (G. Hahn, G. Sabidussi, and R. Woodrow, eds.), NATO ASI Ser. C, Kluwer Academic Publishers, 21–40, Dordrecht, 1990.

[4] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory.* Springer-Verlag London, 2008.

[5] J. Meidanis. *Edge coloring of cycle powers is easy.* Unpublished manuscript, 1998. URL: `http://www.ic.unicamp.br/~meidanis/research/edge/cpowers.ps`.

[6] P. D. Seymour. Sums of circuits. *Graph Theory and Related Topics*, 341-355, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1979.

[7] G. Szekeres. Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8(3): 367-387, 1973.

[8] C. Q. Zhang. *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs.* Marcel Dekker Incorporation, New York, NY, 1997.