



Geração de Malhas Triangulares

Palavras-chave: Delaunay, Malhas, Triangulações.

Henrique Tonello Pereira [Unicamp]
Prof^o Dr. Ricardo Biloti (orientador) [Unicamp]
Bolsa De Iniciação Científica PICME - CNPq

1 Introdução

A ideia da geração de malhas consiste em decompor um domínio geométrico de forma a representar informações em pequenas células. Neste projeto trabalhamos com malhas triangulares em 2D, isto é, regiões no plano decompostas por triângulos.

Malhas triangulares são muito importantes em computação gráfica, pois diversos objetos são mapeados por malhas para serem renderizados ou submetidos a outros métodos de imagem. Na cartografia, geografia, entre outros, os terrenos podem ser representados por meio de malhas, fornecendo uma representação mais compacta das informações da região.

O foco particular é no estudo de triangulações de Delaunay no plano, como são definidas e sobre o processo de construção, tanto teórico quanto computacional, de geração de uma malha de qualidade.

As triangulações de Delaunay foram utilizadas por fornecerem um bom conjunto de triângulos para usar como polígonos em malhas. Em específico, a triangulação Delaunay evita triângulos estreitos (a resolução de equações diferenciais utilizando-se malhas com esses triângulos, por exemplo, leva a dificuldades numéricas).

2 Metodologia

A principal referência do projeto foi o livro *Geometry and Topology for Mesh Generation* [1], de Herbert Edelsbrunner, que continha a base teórica do estudo. Como apoio ao desenvolvimento computacional, utilizamos também o livro de O'Rourke [2], *Computational Geometry in C*. Empregamos ainda o ambiente de computação numérica *Octave* para colocar em prática o entendimento do conteúdo, implementar os algoritmos criados, testar e validar ideias. Também utilizamos o *Geogebra* como uma ferramenta para entender conceitos estudados e trabalhar ideias iniciais antes de desenvolver os algoritmos.

3 Conceitos estudados e desenvolvimento do projeto

Para entender o que são triangulações de Delaunay, devemos estabelecer alguns conceitos antes. Considere um conjunto de pontos S no plano. Chamamos de *fecho-convexo* do conjunto S o menor polígono convexo que contém todos os pontos de S . Chamamos de *triangulação* uma decomposição do fecho-convexo por triângulos, que se intersectam no máximo em arestas e têm como vértices os pontos de S .

As triangulações de Delaunay, por sua vez, são um tipo específico de triangulação que maximiza o ângulo interno mínimo dos triângulos e evita triângulos estreitos. Um exemplo é apresentado abaixo.

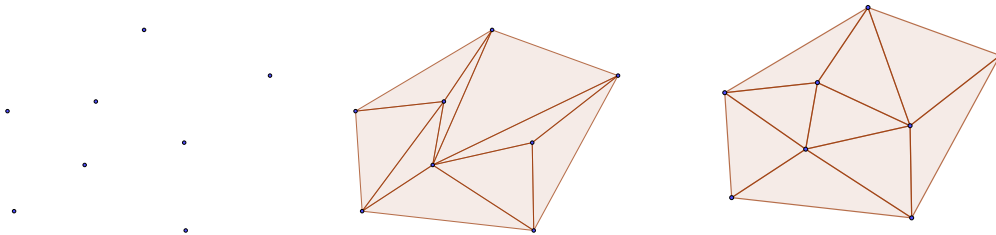


Figura 1: À esquerda, vemos um conjunto de pontos no plano. Ao meio, mostramos um exemplo de triangulação que poderia ser criada a partir destes pontos. À direita, mostramos uma triangulação de Delaunay desses pontos.

Essencialmente, a definição de *triangulação de Delaunay* vem do conceito de *diagramas de Voronoi*. A *Região de Voronoi* de um ponto $x \in S$ é o conjunto de pontos do plano que está mais próximo de x do que de qualquer outro ponto do conjunto S . As regiões equidistantes a dois pontos são representadas por uma linha, e o conjunto dessas linhas formam um Diagrama de Voronoi. As triangulações de Delaunay, por sua vez, são o conjunto de triângulos cujas arestas são os segmentos que conectam os pontos que são equidistantes a 3 pontos do conjunto S . Esses conceitos estão ilustrados na Figura 2.

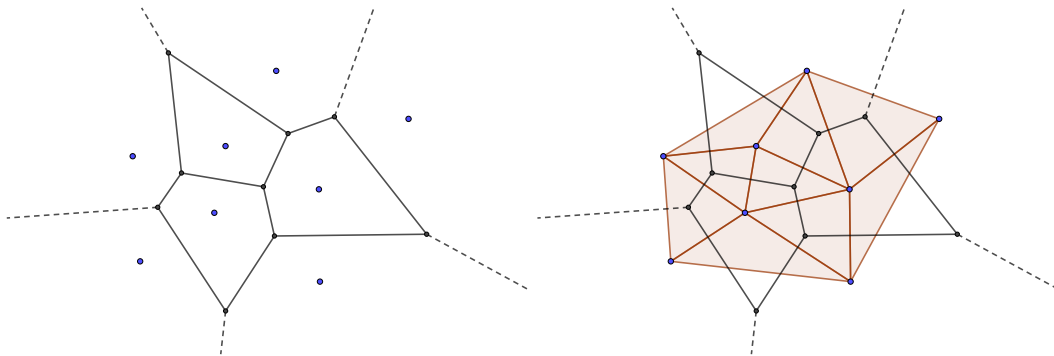


Figura 2: À esquerda temos um diagrama de Voronoi e à direita temos uma triangulação de Delaunay.

Chamamos de *circuncírculo* o círculo formado a partir dos 3 vértices de um triângulo, e esse circuncírculo é dito *vazio*, se não há nenhum ponto dentro dele. Um teorema nos dá uma nova interpretação dos triângulos de Delaunay:

Teorema 3.1. Afirmação do Circuncírculo: *Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto finito de pontos, e considere $a, b, c \in S$. Então abc é um triângulo de Delaunay se, e somente se, o circuncírculo de abc é vazio.*

Com isso, é possível transformar triangulações em triangulações de Delaunay realizando uma “troca de arestas” para satisfazer a propriedade de ser Delaunay. Veja na Figura 5.

Contudo, o custo computacional para verificar se um triângulo é Delaunay pode ser um pouco alto. Pela forma que estamos acostumados a fazer, é necessário calcular duas mediatrizes do triângulo para encontrar o circuncentro, isto é, o centro do circuncírculo, calcular a distância entre o circuncentro e um vértice e a distância entre o circuncentro e o ponto para enfim compará-las.

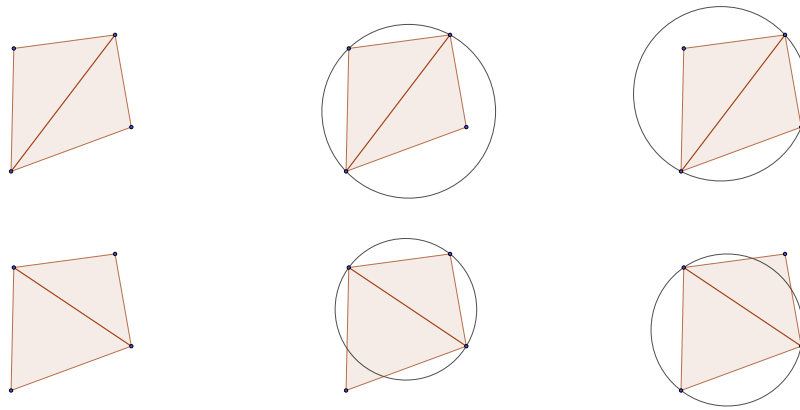


Figura 3: Na primeira linha nenhum triângulo é Delaunay, isto é, o circuncírculo de cada triângulo não é vazio. Na segunda linha, com uma mudança de arestas, todos os triângulos são Delaunay.

Alternativamente, considere um espaço tridimensional. Sejam a' , b' , c' e d' as projeções verticais de a , b , c e d , no plano xy , em um parabolóide definido por $\Pi : z = x^2 + y^2$, como ilustrado na Fig.4.

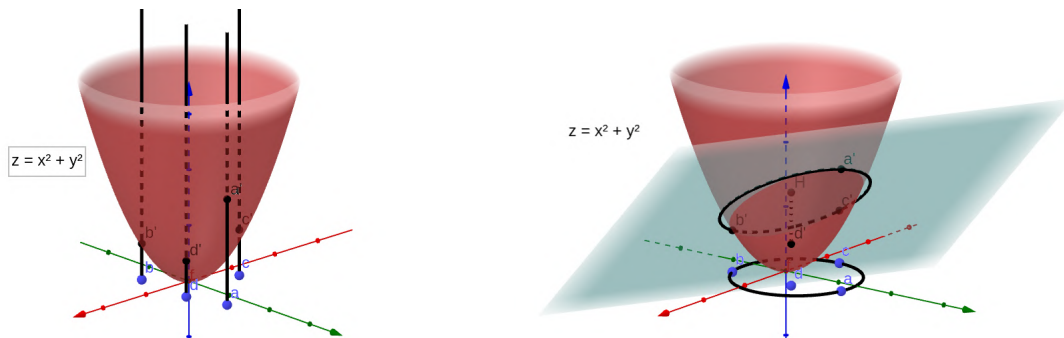


Figura 4: Parabolóide com as projeções verticais dos pontos no plano xy e o plano formado por três desses pontos.

Com essa noção, podemos apresentar o seguinte resultado.

Teorema 3.2. Afirmação do Círculo Elevado: Um ponto d está dentro do circuncírculo de abc se, e somente se, o ponto d' está verticalmente abaixo do plano passando por a' , b' e c' .

Assim, o cálculo para verificar se um triângulo é Delaunay se resume em verificar o sinal do determinante 4×4 para analisar a posição do 4º ponto em relação ao plano. Na matriz, a primeira coluna possui apenas 1, cada outra coluna possui as coordenadas de x , y e z referente aos 4 pontos. Se o ponto estiver abaixo do plano, então o sinal do determinante é negativo.

Com esses conceitos foi possível desenvolver e implementar um algoritmo para produzir triangulações e então transformá-las em triangulações de Delaunay trocando suas arestas.

Passamos a estudar condições que poderiam ser impostas a essas triangulações. Imagine por exemplo que estamos usando uma malha para representar uma grande região e que há um rio que passa por essa região. Dependendo do que estamos querendo representar, a malha deverá se adequar ao rio, isto é, não poderão ser formados triângulos que sobrepõe o rio. Uma forma de representar uma situação com essa seria fazer com que alguns segmentos fossem fixos.

Triangulações construídas com imposições como esta são ditas *triangulações restritas*. Neste caso, nem sempre é possível criar triangulações de Delaunay para o conjunto de pontos, mas podemos considerar uma parte delimitada pela restrição e tentar construir uma triangulação de Delaunay para um certo conjunto, pensando

que as regiões através das arestas fixas são “invisíveis” umas às outras. Chamamos triangulações como essas de *triangulações de Delaunay restritas*.

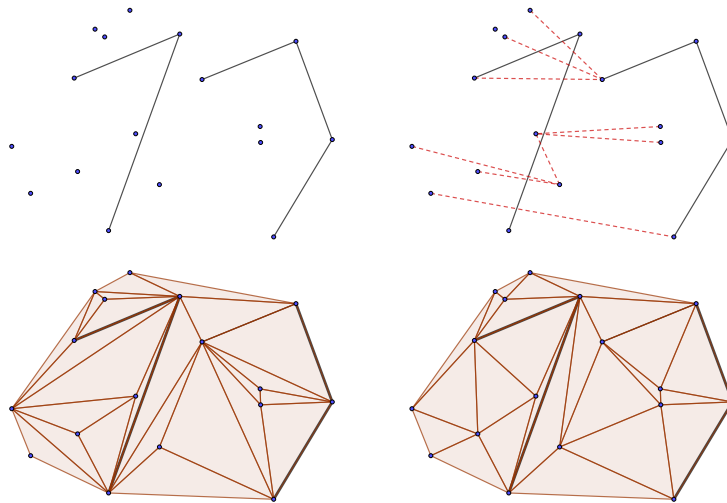


Figura 5: Na primeira linha apresentamos um conjunto de pontos e um conjunto de arestas fixas, além disso, a segunda imagem mostra um conjunto de segmentos que são “impossíveis”. Na segunda linha é apresentado uma triangulação restrita e uma triangulação de Delaunay restrita para estes pontos, respectivamente.

4 Resultados e discussão

Além de obter uma triangulação de Delaunay, era importante entender o processo de “trocar as arestas”. Contudo, era necessário também implementar um programa que pudesse criar uma triangulação qualquer para um conjunto de pontos dados. Iniciamos com a ideia de delimitar a região da triangulação pelo fecho. Em seguida, ignorávamos os pontos na fronteira da região e encontrávamos um novo fecho. Isso foi feito até que não fosse mais possível e, por fim, ligamos os fechos um a um. Essa ideia faz com que uma triangulação com muitos pontos fique parecida com uma rosa, cheia de camadas de pétalas em sequência.

Para a triangulação de Delaunay, fizemos um *loop* sobre as arestas. Para cada aresta considerávamos os dois triângulos que a possuíam e utilizávamos o resultado consequente do Teorema 3.2. Um exemplo de uma triangulação inicial e uma triangulação de Delaunay podem ser visto na Figura 6.

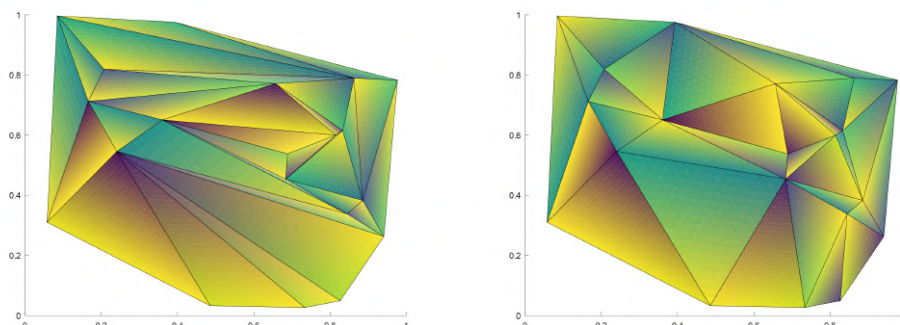


Figura 6: À esquerda, uma triangulação inicial produzida a partir de 20 pontos. À direita, uma triangulação de Delaunay para o mesmo conjunto de pontos.

Com isso, era possível criar uma malha triangular de Delaunay para qualquer conjunto de pontos dados. Um experimento inicial que fizemos foi explorar diversos conjuntos de pontos para visualizar suas triangulações. Veja, por exemplo, uma triangulação de Delaunay de vários pontos formando a logo da Unicamp na Figura 7.

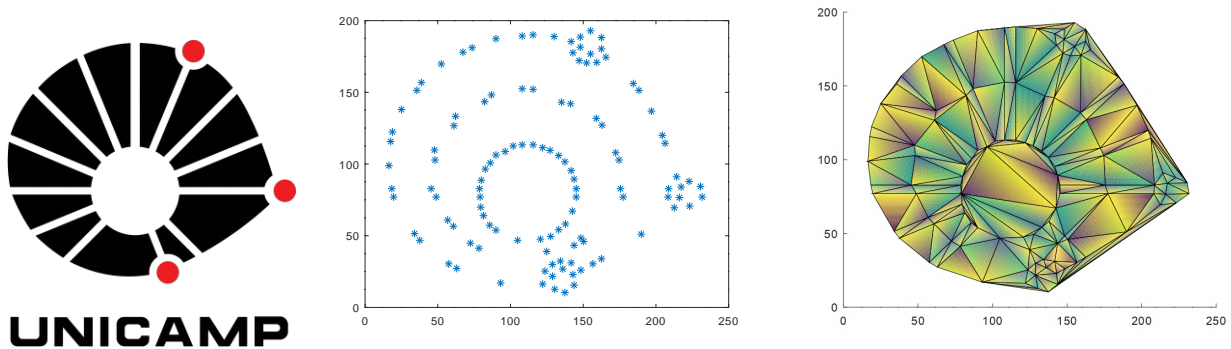


Figura 7: Triangulação produzida pelo Octave a partir de pontos escolhidos pelo aluno para representar o logo da Unicamp.

5 Considerações finais

Neste trabalho, estudamos o processo de criação teórico e computacional das triangulações de Delaunay. Além disso, é satisfatório ter obtido um programa que consegue formar uma triangulação de Delaunay com sucesso. No momento, estamos nos dedicando ao estudo e implementação de algoritmos para a geração de triangulações restritas.

Esperamos aplicar esses conhecimentos em um problema na área de Geofísica de Exploração. Em particular, o problema proposto é explorar a solução numérica da equação da onda pelo traçamento cinemático de raios em meios acústicos suaves, em duas dimensões espaciais, a partir da discretização de malhas triangulares.

Estes conhecimentos serão úteis pois a representação em malhas triangulares possibilita que grande áreas homogêneas do modelo possam ser economicamente representadas por poucas células da malha. Com isso, espera-se construir um algoritmo de traçamento cinemático de raios que seja computacionalmente eficiente, enquanto que a integração do sistema de equações seja feita de forma analítica dentro de cada célula da malha.

Referências

- [1] Herbert Edelsbrunner. *Geometry and Topology for Mesh Generation*. Cambridge University Press; Illustrated edição, 2001. ISBN: 052168207X.
- [2] O'Rourke, Joseph. *Computational Geometry in C*. 2nd. USA: Cambridge University Press, 1998. ISBN: 0521640105.